

8.2. Fonksiyonlarda Limit

Fonksiyonlarda limiti öğrenirken değişkenlerin limitini ve sağdan-soldan limit kavramlarını öğreneceksiniz.

8.2.1. Değişkenin Limiti

Sonsuz sayıda değer alabilen bir x değişkeninin a gibi sabit bir sayıdan farkı, istenildiği kadar küçük seçilebilen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ dan daha da küçük kılınabiliyorsa x değişkeninin limiti a dır denir ve;

$$x \rightarrow a \text{ veya } \lim x = a$$

notasyonları ile gösterilir. O halde ε istenildiği kadar küçük seçilebilen pozitif bir reel sayı olmak üzere x değişkeninin bir a limit değerine yaklaşması demek,

$$|x - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğin sağlanması demektir. Buna göre ,

$$|x - a| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} x - a < \varepsilon \Rightarrow x < a + \varepsilon \\ -(x - a) < \varepsilon \Rightarrow x > a - \varepsilon \end{cases}$$

veya

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

yazılabilir. Bu durumda x değişkeninin a 'ya yaklaşması ya daha büyük değerler olarak sağdan ya da daha küçük değerler olarak soldan olacaktır.

- Birinci hal(sağdan) : $x \rightarrow a^+$
- İkinci hal(soldan) : $x \rightarrow a^-$ şeklinde gösterilir.

8.2.2 Fonksiyonlarda Limit

- $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere x 'in x_0 değerine yakın bütün değerleri için tanımlanmış bir fonksiyon $f(x)$ olsun (Bu fonksiyon x_0 noktasında tanımlanmamış olabilir). İstenildiği kadar küçük seçilebilen bir $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ için ε 'a bağlı bir $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ bulunabiliyorsa ve

$$0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

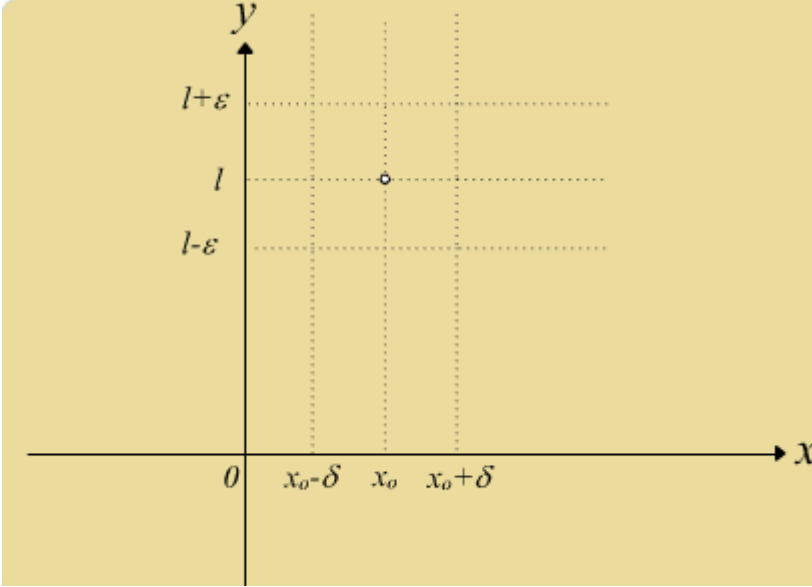
- oldukça

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

- elde ediliyorsa $x \rightarrow x_0$ 'a yaklaştığında $f(x)$ 'in limiti l 'dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

- yazılır.
- Bunun anlamı x ile x_0 arasındaki farkın mutlak değerce yeteri kadar küçük seçilmesi halinde $f(x)$ ile l arasındaki farkın mutlak değerce arzu edildiği kadar küçük kılınabileceğidir.
- **Geometrik Açıklama**
- $f(x)$ fonksiyonun $x \rightarrow x_0$ için limiti geometrik olarak şu şekilde gösterilebilir:



$\epsilon \in \mathbb{R}^+$ için öyle bir $\delta(\epsilon) \in \mathbb{R}^+$ bulunabilmelidir ki,

$[x_0 - \delta(\epsilon), x_0 + \delta(\epsilon)]$ aralığında, x_0 'dan farklı $\forall x$ için $f(x) \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$ olsun. ϵ sayısı keyfi olarak seçilebildiğine göre $y = l$ sabit doğrusunu içine alan ve $y_1 = l - \epsilon$ ve $y_2 = l + \epsilon$ ile sınırlanan şerit istenildiği kadar daraltılabilir.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

olması halinde merkezi (x_0, l) olan bir dikdörtgen daima bulunabilir.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \neq 2 \\ 0 & ; \quad x = 2 \end{cases} \quad \text{fonksiyonunun } x \rightarrow 2 \text{ için limitini bulunuz.}$$

$x = 2$ için $f(x) = 0$ verilmiştir. Ancak $x \rightarrow 2$ halinde $f(x)$ 'in alacağı değeri araştıralım. Önce x 'in 2'ye 2'den büyük değerler olarak yaklaşması halindeki sayı dizisini bulalım.

x	2.1	2.01	2.001	2.000001
x ²	4.41	4.0401	4.004001	4.000004

Bu defa x'in 2'ye 2'den küçük değerler alarak yaklaşması halindeki sayı dizisini elde edelim.

x	1.9	1.99	1.999	1.999999
x ²	3.61	3.9601	3.996011	3.999996

Bu iki sayı dizisinin incelenmesinden, x değişkeninin 2 değerine sağdan ve soldan yaklaşması halinde f(x)'in 4'e yaklaştığı kolayca görülmektedir. Şimdi de $\varepsilon = 10^{-7}$ alarak ,

$$|f(x) - 4| < \frac{1}{10^7} \Rightarrow |(x-2)(x+2)| < \frac{1}{10^7} \Rightarrow |x-2| < \frac{1}{10^7} \cdot \frac{1}{|x+2|}$$

bulunur. x = 2 değeri eşitsizliğin sağındaki toplam ifadesindeki yerine yazılırsa,

$$|x-2| < \frac{1}{4 \cdot 10^7}$$

bulunur. Bu ise x ile 2 sayısı arasındaki farkın mutlak değerinin $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{4 \cdot 10^7}$ sayısından küçük olacağını göstermektedir. Yani x'in 2'ye yaklaşması halinde her defasında $f(x)$ ile 4 sayısı arasındaki farkı, istenildiği kadar küçük seçilebilen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ den daha küçük kılmak mümkündür. O halde ,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \text{ dür.}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 2 = 0$ olduğunu limitin tanımından giderek gösteriniz.

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere ε 'a bağlı öyle bir $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ bulunabilmelidir ki

$$|x-1| < \delta(\varepsilon) \text{ oldukça}$$

$$|x^2 + x - 2 - 0| < \varepsilon \text{ olsun}$$

$$|x^2 + x - 2| < \varepsilon \Rightarrow |x^2 + x - 2| = |(x-2)(x+1)| = |x-2| \cdot |x+1| < \delta(\varepsilon) \cdot \{|x+2|\}$$

$$|x^2 + x - 2| < \varepsilon < \delta(\varepsilon) \cdot \{|x| + |2|\} \quad (1)$$

bulunur.

$\delta(\varepsilon) = 1$ seçelim. Buna göre , $(|a-b| > |a| - |b|)$ olacağından)

$$|x-1| < 1 \Rightarrow |x| - |1| < |x-1| < 1 \text{ yazılabilir.}$$

Buradan, $|x| < 1 + |1| \Rightarrow x < 2$ alınır ve bu değer **(1)** ifadesinde yerine konursa

$$4 < \delta(\epsilon) \{2+2\} = 4 \delta(\epsilon) < \epsilon$$

$$\delta(\epsilon) = \min(1, \frac{\epsilon}{4}) \text{ bulunur.}$$

$$\delta(\epsilon); 1 \text{ ve } \frac{\epsilon}{4} \text{ sayıların en küçüğü alınarak bulunabileceğine göre}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 2 = 0 \text{ olur.}$$

8.2.3 Sağdan Limit – Soldan Limit

x 'in bir x_0 değerine x_0 'dan büyük değerler alarak yaklaşması halinde $f(x)$ fonksiyonunun aldığı değerler dizisinin bir l_1 limiti varsa bu limite de fonksiyonun **sağdan limiti** denir ve,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_1$$

şeklinde ifade edilir.

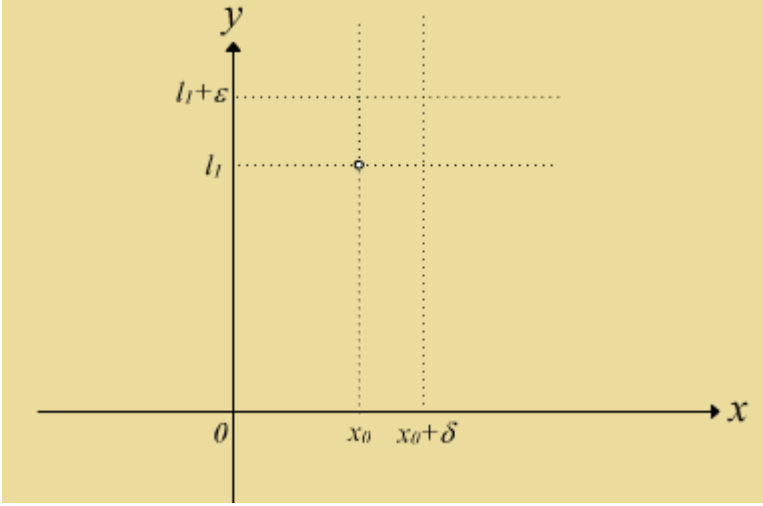
x 'in x_0 değerine x_0 'dan küçük değerler olarak yaklaşması halinde ise $f(x)$ 'in aldığı değerler dizisinin l_2 gibi bir limiti varsa bu limite de fonksiyonun **soldan limiti** denir ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_2$$

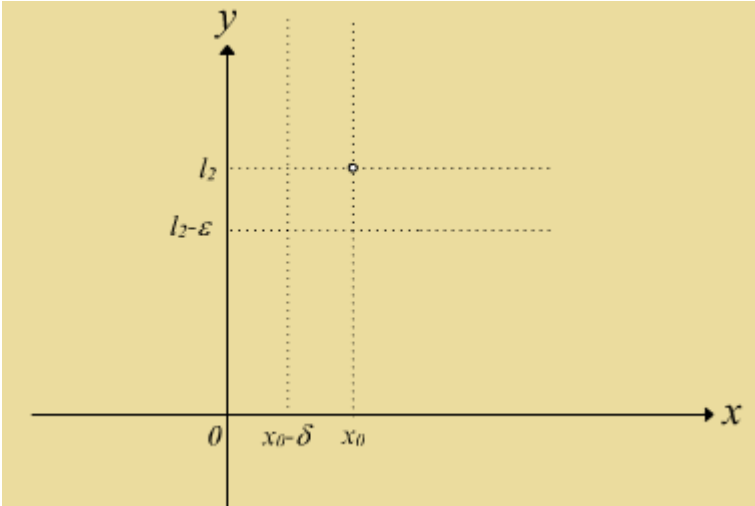
şeklinde ifade edilir.

$l_1 = l_2$ ise yani soldan limit sağdan limite eşitse fonksiyonun bu noktada limiti vardır denir.

Sağdan Limit:



Soldan Limit:



Sağdan ve soldan limitlerin hesabında fonksiyonda x yerine $x_0 + h$ ve $x_0 - h$ değerleri konur ve $h \rightarrow 0$ için limitleri aranır.

$\frac{3}{3^{\frac{1}{x-3}} + 3}$ fonksiyonun $x = 3$ noktasında sağdan ve soldan limitlerini hesaplayınız.

8.3 Limit Kavramlarının Genişletilmesi

Limit kavramlarının genişletilmesi başlığı altında,

" x 'in sonsuz olma hali"

"Limitin sonsuz olma hali"

alt başlıklarını inceleyeceksiniz.

8.3.1 x'in Sonsuz Olması Hali

ε istenildiği kadar küçük seçilebilen pozitif bir reel sayı olmak üzere ε 'a bağlı öyle bir $A \in \mathbb{R}$ bulunabilmelidir ki,

$|x| > A$ oldukça $|f(x) - l| < \varepsilon$ elde edilsin. Bu durumda $x \rightarrow \infty$ 'a yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonun limiti l 'dir denir ve

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ yazılır. x 'in pozitif veya negatif değerler olarak sonsuza yaklaşması haline

göre de $(x > A \text{ veya } x < -A)$;

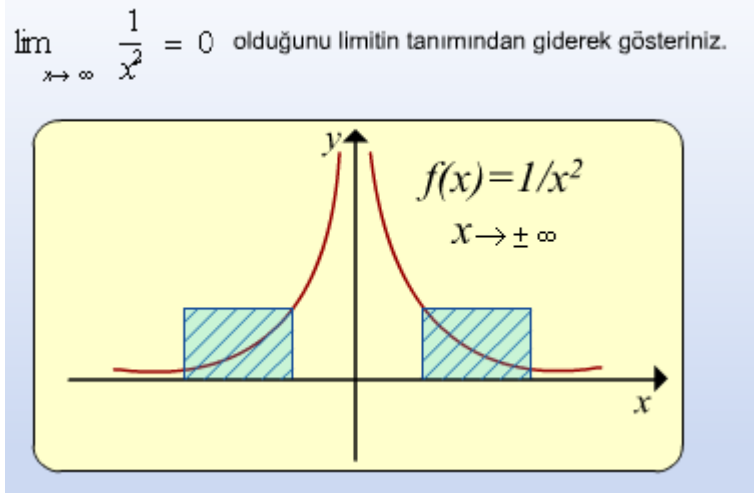
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

veya

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

gösterimleri kullanılır.

Örnek:



Çözüm: ε istenildiği kadar küçük seçilebilen pozitif bir reel sayı olmak üzere ε 'a bağlı öyle bir $A \in \mathbb{R}$ bulunabilmelidir ki;

$|x| > A$ oldukça $\left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < \varepsilon$ elde edilsin. Buna göre,

$$\left| \frac{1}{x^2} \right| < \varepsilon \Rightarrow x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \quad |x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ dolayısıyla;}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ reel sayısı bulunabilmektedir. O halde } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ dır.}$$

Şekilden de görüldüğü gibi x'in pozitif ve negatif değerler olarak ($x > A$ ve $x < -A$) sonsuza yaklaşması halinde de f(x) fonksiyonu sifıra yaklaşmaktadır. Yani,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

8.3.2 Limitin Sonsuz Olması Hali

B istenildiği kadar büyük seçilebilen bir reel sayı olmak üzere B'ye bağlı öyle bir $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bulunabilmelidir ki,

$|f(x)| > B$ oldukça $|x - x_0| < \varepsilon$ elde edilsin. Bu durumda $x \rightarrow x_0$ 'a yaklaştığında f(x) fonksiyonu sonsuza yaklaşıyor denir ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

yazılır. f(x)'in pozitif veya negatif değerler olarak sonsuza yaklaşması haline göre de ($f(x) > B$ veya $f(x) < -B$)

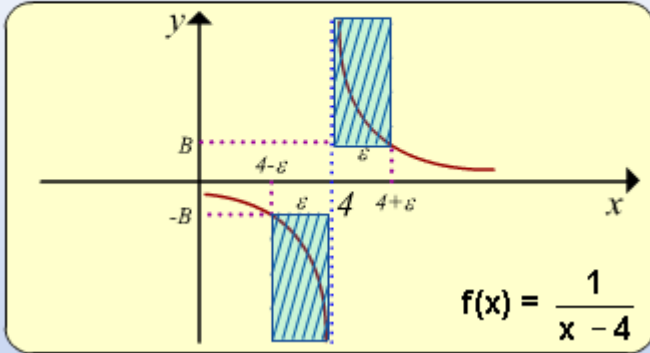
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

veya

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

yazılır.

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x-4} = \infty$ olduğunu limitin tanımından giderek gösteriniz.



Çözüm: Limitin tanımına göre $B \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\left| \frac{1}{x-4} \right| > B$ oldukça $|x-4| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bulunabilmelidir.

$$\left| \frac{1}{x-4} \right| > B \quad |x-4| < \frac{1}{B} = \varepsilon \text{ bulunur.}$$

B istenildiği kadar büyük seçilerek ε istenildiği kadar küçük kılınabilir. Burada,

$$x \rightarrow 4^+ \text{ halinde } f(x) \rightarrow + \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad 'a$$

$$x \rightarrow 4^- \text{ halinde } f(x) \rightarrow - \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad 'a \text{ gittiği}$$

kolayca gösterilebilir.

8.4 Limit İle İlgili Teoremler

1. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonların $x \rightarrow x_0$ yaklaştığında limitleri ;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$$

ise ;

i. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$

ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$

iii. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / g(x) = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right] / \left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right] = l_1 / l_2 \quad (l_2 \neq 0)$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = l_1^{l_2}$$

2. c bir sabit olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c) = c$$

3. $f(x) = x$ fonksiyonunda ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

4. c bir sabit olmak üzere ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))$$

5.

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \quad \text{ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \infty - \infty$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \quad \text{ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0 \cdot \infty$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \quad \text{ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

limitlerine belirsiz şekiller denir. Bu hallerin hemen hepsinde bazı cebirsel işlemler ya da türevden yararlanılan yöntemlerle belirsizliği gidermek mümkündür. Belirsizliğin giderilmesinde türevden yararlanılan yöntemleri daha sonraki bölümlerde inceleyeceğiz. Belirsizliğin cebirsel işlemlerle giderilmesi burada örneklerle açıklanmaya çalışılacaktır.

Örnekler:

$\lim_{x \rightarrow 2} 2x = 4$ olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} 2x &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x \\ &= 2 \cdot 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 27$ olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} x^3 &= (\lim_{x \rightarrow 3} x) \cdot (\lim_{x \rightarrow 3} x) \cdot (\lim_{x \rightarrow 3} x) \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 27\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2x - 1 = 2$ olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 1) &= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 2x - \lim_{x \rightarrow 1} 1 \\ &= (\lim_{x \rightarrow 1} x) \cdot (\lim_{x \rightarrow 1} x) + 2 \cdot (\lim_{x \rightarrow 1} x) - \lim_{x \rightarrow 1} 1 \\ &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x^2}{x+2} = -\frac{8}{5}$ olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x^2}{x+2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (1-x^2)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x+2)} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 1 - \lim_{x \rightarrow 3} x^2}{\lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 2} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 1 - (\lim_{x \rightarrow 3} x) \cdot (\lim_{x \rightarrow 3} x)}{\lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 2} \\
&= \frac{1-3 \cdot 3}{3+2} \\
&= -\frac{8}{5}
\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+1/n)^n = e$ olduğunu gösteriniz.

Binom açılımına göre ;

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{n^2} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Bu açılım n büyüdükçe $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ifadesinin de büyüyeceğini gösterir. Diğer taraftan $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ifadesi

daima 3'ten küçük kalır. Zira bu açılımda üçüncü terimden itibaren $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ çarpanları yerine kendilerinden daha büyük olan 1 sayısını koyarsak ;

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

ifadesini elde ederiz.

Bu ifadeyi

$$2! = 2$$

$$3! > 2^2$$

.....

$n! > 2^{n-1}$ yazarak büyütürsek

$(1 + \frac{1}{n})^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$ geometrik serisini elde ederiz . Geometrik seri toplam formülünden faydalanarak ;

$$(1 + \frac{1}{n})^n < 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3 \text{ elde ederiz. Buradan aranan limitin 2 ile 3 arasında olduğu bulunur.}$$

Diğer taraftan ;

$$(1 + \frac{1}{n})^{n-1} < (1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \text{ yazılabilir.}$$

Buradan ;

$$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} - (1 + \frac{1}{n})^{n-1} = (1 + \frac{1}{n})^{n-1} [(1 + \frac{1}{n})^2 - 1]$$

$$= (1 + \frac{1}{n})^{n-1} (\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) < (1 + \frac{1}{n})^n (\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) < 3 (\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})$$

n arttıkça bu ifadenin limitinin sıfır olacağı açıktır. Böylece e 'nin limitinin mevcut olduğu görülmüş olur. İlk 10 basamak doğru değeri

$$e = 2,7182818285\text{'dir.}$$

8.6 Limitle İlgili Örnekler (II)

Aşağıdaki limitlerin doğruluğunu gösteriniz.

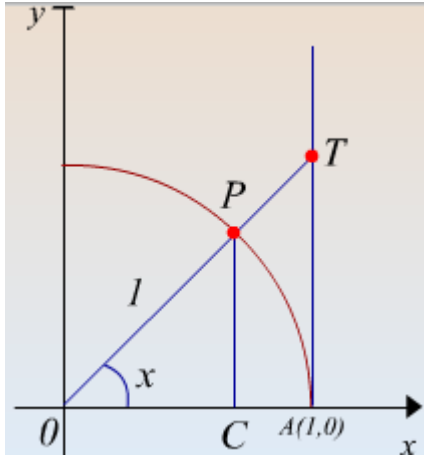
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x}{\lim_{x \rightarrow 0} x} = \frac{0}{0}$$

belirsiz sonucu bulunur.

Bu ifadenin limitini geometrik yoldan bulmaya çalışalım. Bunun için birim çemberi alalım x açısını

radyan cinsinden $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında seçelim. Şekilden ;



$$A(\text{OAT}) > A(\text{OAP}) > A(\text{OCP})$$

$$S(\text{OCP}) = \frac{1}{2} \overline{\text{OC}} \cdot \overline{\text{PC}} = \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x$$

$$S(\text{OAP}) = \frac{\pi r^2 \cdot \frac{x}{2\pi}}{2\pi} = \pi \cdot 1 \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$$

$$S(\text{OAT}) = \frac{1}{2} \overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{AT}} = \frac{1}{2} \tan x \text{ bulunur.}$$

$$\frac{1}{2} \tan x > \frac{1}{2} x > \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} > x > \cos x \cdot \sin x$$

ifadesinin tersi alınır ve her tarafı $\sin x$ ile çarpılırsa ;

$$\sin x \left[\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} \right] \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$
 ifadesi elde edilir.

İfadenin $x \rightarrow 0$ için limiti alınırsa ;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$1 < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \text{ ifadesinin sonucu nedir?}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1 \cdot 1$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \text{ ifadesinin sonucu nedir?}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$= 0 \cdot 1$$

$$= 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$ ifadesinin sonucu nedir?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} k \cdot \frac{\sin kx}{kx}$$

$$= k \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx}$$

$$= k \cdot 1$$

$$= k$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ ifadesinin sonucu nedir?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\infty}$$

$$= 0$$

8.7 Limitle İlgili Örnekler (III)

Aşağıdaki limitlerin doğruluğunu gösteriniz.

$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cotg 3x$ ifadesinin sonucu nedir?

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cotg 3x &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{\tg 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{3x \frac{\tg 3x}{3x}}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tg 3x}{3x}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{3}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$ ifadesinin sonucu nedir?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \frac{\sin 3x}{3x}}{5x \frac{\sin 5x}{5x}}$$

$$= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 5x}{5x}}$$

$$= \frac{3}{5}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 5}{5x^3 + 2x + 1}$ ifadesinin sonucu nedir?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 5}{5x^3 + 2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{7}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)}{x^3 \left(5 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}$$

$$= \frac{0}{5}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x} \text{ ifadesinin sonucu nedir?}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - 2 \sin x \cdot \cos x}{\sin x (\pi - 3x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sin 2x}{\sin x (\pi - 3x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin \left(-\frac{x}{2}\right) \cdot \cos \frac{3x}{2}}{\sin x (\pi - 3x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} (\pi - 3x)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos \frac{3x}{2}}{\cos \frac{x}{2} (\pi - 3x)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right)}{2 \cos \frac{x}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1}{2 \cos \frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right)}$$

$$= - \frac{1}{2 \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{3}}$$