Türev Uygulamaları

ÜNİTE

10

Yazar
Prof.Dr. Vakıf CAFEROV

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- türev kavramı yardımı ile fonksiyonun monotonluğunu, ekstremum noktalarını, konvekslik ve konkavlığını, büküm noktalarını araştırabilecek,
- fonksiyonun grafiğinin çiziminde türev kavramının nasıl kullanabileceğini öğrenecek,
- ekstremum problemlerinin çözümüne dair örneklerle tanışacaksınız.

İçindekiler

- Giriş 251
- Fonksiyonun Artan, Azalan Olduğu Aralıklar ve Ekstremum Noktaları 251
- Konvekslik, Konkavlık ve Grafik Çizimi 259
- Ekstremum Problemleri 273
- Değerlendirme Soruları 276

Çalışma Önerileri

- Ünitedeki testleri ve grafik çizimi için gereken işlemleri iyi öğreniniz
- Türevlerin işaret tablolarından yararlanmayı alışkanlık haline getiriniz
- Çözülmüş örnekleri iyi inceleyiniz
- Çeşitli fonksiyon örnekleri alıp, türev yardımı ile gerekli özellikleri araştırınız ve grafiklerini çizmeye çalışınız.

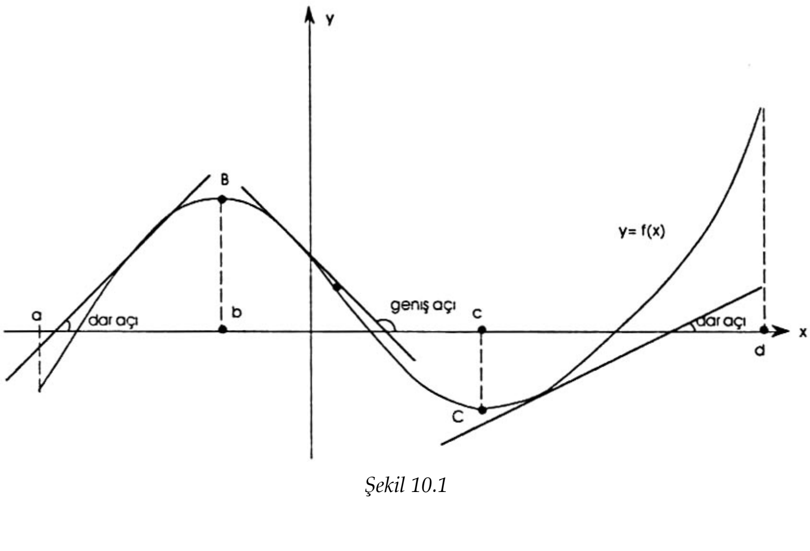
1. Giriş

Basit geometri ve fizik problemlerinde türev kavramının nasıl ortaya çıktığını geçen ünitenin başında gördük. Biz bu ünitede matematiğin önemli bir kavramı olan türev kavramının, fonksiyonun artan, azalan olduğu aralıkların belirlenmesinde, ekstremum noktalarının bulunmasında, konkav ve konveks olduğu aralıkların araştırılmasında, kısaca fonksiyon davranışının incelenmesinde ne kadar önemli bir araç olduğunu göreceğiz.

2. Fonksiyonun Artan, Azalan Olduğu Aralıklar ve Ekstremum Noktaları

A, sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere f: A→ IR fonksiyonu verilsin. Ünite 5 de, eğer her $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \leq f(x_2)$ ise f(x) fonksiyonuna A üzerinde **monoton artan fonksiyon**, $f(x_1) < f(x_2)$ ise **kesin artan fonksiyon** demiştik.

Benzer şekilde, eğer her $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise f(x) fonksiyonuna A üzerinde **monoton azalan fonksiyon**, $f(x_1) > f(x_2)$ ise **kesin azalan fonksiyon** demiştik.



Şekil 10.1

Grafiği şekil 10.1 deki gibi verilmiş y = f(x) fonksiyonu (a,b) ve (c,d) aralıklarında kesin artan, (b, c) aralığında ise kesin azalandır.

Şekilden de görüldüğü gibi eğer y = f(x) fonksiyonu A aralığında kesin artan ise o zaman her bir $x \in A$ için (x, f(x)) noktasındaki teğet doğrusu apsis ekseni ile dar açı oluşturur. Fonksiyonun kesin azalan olduğu aralıkta ise teğet doğrusu apsis ekseni ile geniş açı oluşturur. Buna göre, türevlenebilir y = f(x) fonksiyonu verildiğinde:

Eğer bir aralığın tüm x noktalarında $f'(x) \geq 0$ ise fonksiyon bu aralıkta monoton artan, eğer $f'(x) > 0$ ise kesin artan fonksiyondur.

Eğer bir aralığın tüm x noktalarında $f'(x) \leq 0$ ise fonksiyon bu aralıkta monoton azalan, eğer $f'(x) < 0$ ise kesin azalan fonksiyondur.

Bu sonuçlara göre, türevlenebilir $y= f(x)$ fonksiyonunun kesin artan olduğu aralıkları bulmak için fonksiyonun $f'(x)$ türevini bulup $f'(x) > 0$ eşitsizliğinin, kesin azalan olduğu aralıkları bulmak için ise $f'(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümelerinin bulunması gerekmektedir.

Örnek:

1) $y= x^2$

2) $y= x^2 - 2x$

3) $y= x^3 - 3x + 3$

4) $y= 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

fonksiyonlarının kesin artan ve azalan olduğu aralıkları bulalım.

Çözüm:

1) $f(x)= x^2$, $f'(x) = (x^2)' = 2x$ olduğundan $f'(x)$ türev fonksiyonunun işaret tablosu aşağıdaki gibidir (2. üniteye bakınız):

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x) = 2x$		-	0	+	

Buna göre, $y = x^2$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında kesin artan, $(-\infty, 0)$ aralığında ise kesin azalandır.

2) $f(x)= x^2 - 2x$, $f'(x) = (x^2 - 2x)' = 2x - 2$ olduğundan türev fonksiyonunun işaret tablosu aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$		1		∞
$f'(x) = 2x - 2$		-	0	+	

Buna göre, $y = x^2 - 2x$ fonksiyonu $(1, \infty)$ aralığında kesin artan, $(-\infty, 1)$ aralığında ise kesin azalandır.

3) $f(x) = x^3 - 3x + 3$, $f'(x) = (x^3 - 3x + 3)' = 3x^2 - 3$; $3x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0.$

Son eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ dur (Ünite 2 ye bakınız).

$3x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0$,

bu eşitsizliğin çözüm kümesi ise $(-1, 1)$ aralığıdır.

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x) = 3x^2 - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Fonksiyon, $(-\infty, -1)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarında kesin artan, $(-1, 1)$ aralığında ise kesin azalandır.

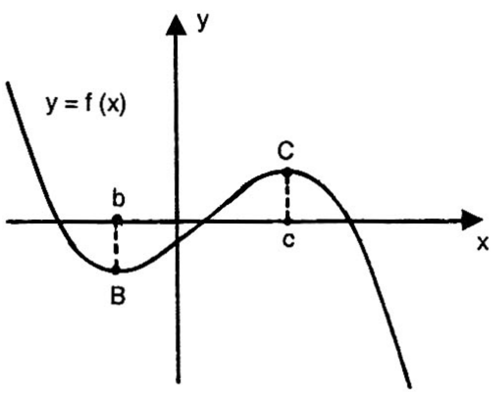
4) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, $f'(x) = (2x^3 - 3x^2 - 12x + 1)' = 6x^2 - 6x - 12$;
$6x^2 - 6x - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 2.$

İşaret tablosu aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Fonksiyon $(-\infty, -1)$ ve $(2, \infty)$ aralıklarında kesin artan, $(-1, 2)$ aralığında ise kesin azalandır.

Grafiği aşağıdaki gibi olan bir $y = f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun.



Şekil 10.2

Fonksiyonun azalanlıktan artanlığa ve artanlıktan azalanlığa geçtiği B ve C noktalarını ele alalım. Bu noktaların apsisleri b ve c dir. Şekil 10.2 de görüldüğü gibi:

1) Eğer x değişkeni b nin "küçük" bir komşuluğunda ise $f(x)$ fonksiyon değeri $f(b)$ değerinden küçük değildir.

2) Eğer x değişkeni c nin "küçük" bir komşuluğunda ise $f(x)$ fonksiyon değeri $f(c)$ değerinden büyük değildir.

3) b noktasının solunda $y = f(x)$ fonksiyonu kesin azalan $(f'(x) < 0)$, sağında ise kesin artandır $(f'(x) > 0)$.

4) c noktasının solunda $y = f(x)$ fonksiyonu kesin artan $(f'(x) > 0)$, sağında ise kesin azalandır $(f'(x) < 0)$.

5) B ve C noktalarındaki teğetler apsis eksenine paraleldir ve buna göre

$$f'(b) = f'(c) = 0$$

dır. İşte $x = b$ gibi noktalara yerel minimum, $x = c$ gibi noktalara ise yerel maksimum noktaları denir.

$f : A \rightarrow IR$ fonksiyonu ve $x_0 \in A$ noktası verilsin. Eğer öyle bir $\varepsilon > 0$ varsa ki $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A$ olmak üzere, her bir $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ için

$$f(x) \leq f(x_0)$$

ise, $x = x_0$ noktasına $y = f(x)$ fonksiyonunun (A kümesinde) **yerel maksimum noktası** denir.

Eğer bu tanımda $f(x) \leq f(x_0)$ eşitsizliğini

$$f(x) \geq f(x_0)$$

eşitsizliği ile değiştirsek $x = x_0$ noktasına $y = f(x)$ fonksiyonunun (A kümesinde) **yerel minimum noktası** denir.

Yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına fonksiyonun **ekstremum noktaları** denir. Fonksiyonun ekstremum noktasındaki değerine onun **ekstremum değeri** denir.

$f: A \rightarrow IR$ fonksiyonu verilsin. Eğer bir $x_0 \in A$ noktası fonksiyonun ekstremum noktası ise ve bu noktada türev varsa o zaman $f'(x_0) = 0$ dır.

Bu nedenle türevin sıfır olduğu noktalar ekstremum noktası olmaya aday noktalardır. Bir noktanın ekstremum noktası olup olmadığına karar vermek için aşağıdaki işlemler yapılır.

Birinci Türev Testi

A aralığı üzerinde tanımlı bir $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun ekstremumlarını bulmak için aşağıdaki işlemler yapılmalıdır.

1) Fonksiyonun $f'(x)$ türevi alınır ve $f'(x) = 0$ denkleminin tüm kökleri bulunur. Sonra (eğer varsa) tanım kümesinden olan ve fonksiyonun sürekli olduğu, fakat $f'(x)$ türevinin mevcut olmadığı x noktaları da belirlenir. Bu tür noktalara ve $f'(x) = 0$ denkleminin köklerinin hepsine kritik noktalar denir. Kritik noktalar büyüklük sırasına göre $x_1, x_2, x_3, ...$ olsun.

2) Türevin işaret tablosu oluşturulur. Bunun için $f'(x)$ türevinin ifadesinde x yerine x_1 den küçük herhangi değer, sonra ise x_1 ile x_2 arasından herhangi değer yazılarak türevin işaretleri belirlenir. Eğer türevin işareti "+" dan "-" ye değişirse x_1 noktası yerel maksimum, "-" den "+" ya değişirse x_1 noktası yerel minimum noktasıdır. Eğer türevin işareti değişmezse x_1 noktasında ekstremum yoktur.

3) Sonra $f'(x)$ türevinin ifadesinde x yerine x_2 ile x_3 arasından herhangi bir değer yazarak (x_2, x_3) aralığında türevin işareti belirlenir ve x_2 noktasının ekstremum noktası olup olmadığına karar verilir.

4) Tüm kritik noktalar için bu işlem tekrarlanır.

Örnek:

1) $y = x^2 - 2x + 2$

2) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

3) $y = x^3 - 1$

4) $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$

fonksiyonlarının ekstremum noktalarını bulalım.

Çözüm:

1) $f'(x) = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Tek kritik nokta $x = 1$ dir ve $(-\infty, 1)$ de fonksiyon azalan, $(1, \infty)$ da ise artandır. Bunu tabloda ifade etmek için "$\searrow$" ve "$\nearrow$" işaretleri kullanılarak tabloya yeni satır eklenir:

x	$-\infty$		1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

$x = 1$ kritik noktasında fonksiyon azalanlıktan artanlığa geçtiğinden $x = 1$ yerel minimum noktası, $f(1) = 1^2 - 2.1 + 2 = 1$ ise yerel minimum değeridir.

2) $f'(x) = (2x^3 - 3x^2 - 12x + 1)' = 6x^2 - 6x - 12;$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2.$

Kritik noktalar iki tanedir: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Tablo aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$		-1		2		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	8	$\searrow$	-19	$\nearrow$	

$x = -1$ noktasında $f(x)$ artanlıktan azalanlığa geçtiğinden $x = -1$ noktası yerel maksimum noktasıdır; $x = 2$ de ise $f(x)$ azalanlıktan artanlığa geçtiğinden $x = 2$ noktası yerel minimum noktasıdır.

$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 1 = 8$ yerel maksimum değer,

$f(2) = 2.\,2^3 - 3.\,2^2 - 12.\,2 + 1 = -19$ yerel minimum değeridir.

3) $f'(x) = (x^3 - 1)' = 3x^2;$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$

$x = 0$ kritik nokta olduğundan tablo aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-1	$\nearrow$	

$x = 0$ noktasının solunda ve sağında fonksiyon artan olduğundan $x = 0$ ekstremum noktası değildir. Buna göre fonksiyonun ekstremumu yoktur.

4) $f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}} - 1\right)' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$;

$f'(x) = 0$ denkleminin kökü yoktur, $x = 0$ noktası tanım kümesinde olmasına karşılık $f'(0)$ türevi mevcut değildir. Buna göre, $x = 0$ tek kritik noktadır. Tablo aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		0		∞
f'x)		-	yoktur	+	
f(x)		↘	- 1	↗	

$x = 0$ yerel minimumdur, $f(0) = -1$ ise yerel minimum değeridir.

Eğer bir aralık tanım kümesine dahilse ve kritik nokta içermiyorsa bu aralıkta türevin işaretini belirlemek için bu aralıktan herhangi bir değer alınarak türevin işareti belirlenebilir.

Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu II. mertebeden türevlenebilir ise o zaman ekstremum noktalarının belirlenmesi için ikinci türev testi uygulanabilir.

İkinci Türev Testi

1) Önce $f'(x) = 0$ denkleminin kökleri olan tüm kritik noktalar belirlenir.

2) Fonksiyonun $f''(x)$ II. mertebeden türevi bulunur.

Eğer x_0 kritik noktası için $f''(x_0) < 0$ ise x_0 noktası yerel maksimum noktasıdır.

Eğer x_0 kritik noktası için $f''(x_0) > 0$ ise x_0 noktası yerel minimum noktasıdır

Örnek:

1) $y = x^2 - 6x + 8$

2) $y = x^4 - 18x^2 + 4$

3) $y = x^2 - 2\ln x$

fonksiyonlarının ekstremum noktalarını bulalım.

Çözüm:

1) $f'(x) = (x^2 - 6x + 8)' = 2x - 6$;
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ kritik noktadır.

$f''(x) = (f'(x))' = (2x - 6)' = 2$,
$f''(3) = 2 > 0$

olduğundan ikinci türev testine göre, $x = 3$ noktası yerel minimum noktası, $f(3) = 3^2 - 6.3 + 8 = -1$ ise yerel minimum değeridir.

2) $f'(x) = (x^4 - 18x^2 + 4)' = 4x^3 - 36x$;
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x = 0 \Leftrightarrow 4x(x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow$
$x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$ kritik noktalardır.

$f''(x) = (f'(x))' = (4x^3 - 36x)' = 12x^2 - 36$,
$f''(-3) = 12(-3)^2 - 36 = 108 - 36 = 72 > 0$,
$f''(0) = 12.0 - 36 = -36 < 0$,
$f''(3) = 12.3^2 - 36 = 72 > 0$

olduğundan ikinci türev testine göre, $x = 0$ yerel maksimum, $x = -3$ ve $x = 3$ ise yerel minimum noktalarıdır. $f(0) = 4$ yerel maksimum, $f(-3) = -77$, $f(3) = -77$ ise yerel minimum değerleridir.

3) Fonksiyonun tanım kümesi $x > 0$ değerleridir.

$$f'(x) = (x^2 - 2\ln x)' = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} ;$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 1)}{x} = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 ,\ x_2 = 1 .$$

$x = -1$ noktası tanım kümesi dışında olduğundan tek kritik nokta $x = 1$ dir.

$$f''(x) = \left(\frac{2(x^2 - 1)}{x}\right)' = 2 + \frac{2}{x^2} ,$$

$$f''(1) = 2 + \frac{2}{1^2} = 4 > 0$$

olduğundan $x = 1$ noktası yerel minimum noktası, $f(1) = 1^2 - 2\ln 1 = 1$ ise yerel minimum değeridir.

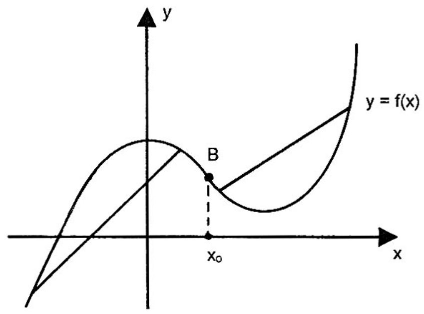
Not: İkinci türev testi birinci türev testine göre daha kullanışlı gözükebilir. Fakat birinci türev testi ikinci türev testine göre daha geniş sınıf problemlere uygulanabilir. Örneğin, eğer $f(x)$ fonksiyonu II. mertebeden türevlendirilebilir değilse veya fonksiyon II. mertebeden türevlenebilir, ancak x_0 kritik noktası için $f''(x_0) = 0$ ise ikinci türev testi uygulanamaz.

Örneğin, $f(x) = (x - 1)^4$ fonksiyonunun tek kritik noktası $x = 1$ dir. Bu noktada $f''(x)$ türevi de sıfır olduğundan ikinci türev testi uygulanamaz. Buna karşılık, birinci türev testi ile bu noktanın bir yerel minimum noktası olduğu kolayca görülebilir.

3. Konvekslik, Konkavlık ve Grafik Çizimi

$y = f(x)$ fonksiyonunun Şekil 10.3 te verilen grafiğini ele alalım. Grafiğin, apsisi x_0 olan B noktasına kadar olan kısmında herhangi bir kiriş, grafik parçasının altında, B noktasından sonraki kısmında ise üstte kalır.

Bu durumda grafiğin B ye kadar kısmı konkav, B den sonraki kısmı konveks, B noktası ise büküm noktası olur.



Şekil 10.3

$y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. Eğer bir aralıkta $y = f(x)$ in grafiğinin her kirişi ilgili grafik parçasının üstünde kalıyorsa fonksiyona bu aralıkta **konveks fonksiyon (veya yukarı bükey fonksiyon),** altında kalıyorsa **konkav fonksiyon (veya aşağı bükey fonksiyon)** denir. Fonksiyonun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği noktaya fonksiyonun **büküm noktası** denir.

Konvekslik, Konkavlık ve Büküm Noktası Testi

$y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. Eğer bir (a, b) aralığında $f''(x) > 0$ ise f fonksiyonu bu aralıkta konvekstir, eğer (a, b) aralığında $f''(x) < 0$ ise f fonksiyonu bu aralıkta konkavdır. Buna göre, fonksiyonun konveks ve konkav olduğu aralık veya aralıklarla büküm noktalarını bulmak için şu işlemler yapılır:

1) $f(x)$ fonksiyonunun $f''(x)$ ikinci türevi bulunur.

2) $f''(x) > 0$ eşitsizliği çözülerek f fonksiyonunun konveks olduğu aralıklar;
$f''(x) < 0$ eşitsizliği çözülerek de konkav olduğu aralıklar bulunur.

3) Eğer x_0 noktasında $f''(x_0) = 0$ ise ve x_0 noktasının solunda ve sağında $f''(x)$ ikinci türevi zıt işaretli değerler alıyorsa o zaman x_0 noktası büküm noktasıdır.

Eğer bir x_1 noktasında fonksiyon sürekli ve bu noktada $f'(x_1)$ ve $f''(x_1)$ türevlerinden en az biri yoksa ve bu noktanın solunda ve sağında $f''(x)$ ikinci türevi zıt işaretli değerler alıyorsa, o zaman x_1 noktası yine büküm noktasıdır.

Örnek:

1) $y = x^2$

2) $y = x^3$

3) $y = x^4$

4) $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12$

fonksiyonlarının konvekslik, konkavlık aralıklarını ve büküm noktalarını bulalım.

Çözüm:

1) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$

dir. Tüm $x \in IR$ için $f''(x) > 0$ olduğundan fonksiyon her yerde konvekstir ve büküm noktası yoktur.

2) $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$;

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

f'' ikinci türevi için işaret tablosu aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

Buna göre $(-\infty, 0)$ aralığında fonksiyon konkav, $(0, \infty)$ da konvekstir. $x = 0$ noktasında $f''(0) = 0$, $x = 0$ ın solunda $f''(x) < 0$, sağında $f''(x) > 0$ olduğundan $x = 0$ büküm noktasıdĕr.

3) $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ olduğundan fonksiyon her yerde konvekstir ve büküm noktası yoktur.

4) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12$, $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x$, $f''(x) = 12x^2 - 12x - 24$;

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x - 24 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Buna göre f'' nün işaret tablosu aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$		-1		2		∞
f'' (x)		+	0	-	0	+	

Tabloya göre, $(-\infty, -1)$ ve $(2, \infty)$ aralıklarında fonksiyon konveks, $(-1, 2)$ aralığında ise konkavdır. $x = -1$ ve $x = 2$ noktalarında $f''(x)$ türevi işaret değiştirdiğinden $x = -1$ ve $x = 2$ noktaları büküm noktalarıdır.

$y = x^4 - 24x^2 + x + 1$ fonksiyonunun konvekslik , konkavlık aralıklarını ve büküm noktalarını bulunuz.

?

Cevabınız şöyle olmalıdır: $(-\infty, -2)$ ve $(2, \infty)$ aralıklarında fonksiyon konveks, $(-2, 2)$ aralığında konkav, $x = -2$ ve $x = 2$ noktaları büküm noktalarıdır.

Örnek:

1) $y = \sqrt[3]{x} + 1$

2) $y = \sqrt[3]{(x-1)^5}$

fonksiyonlarının konvekslik, konkavlık aralıklarını ve büküm noktalarını bulalım.

Çözüm:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$, $f'(x) = \left(\sqrt[3]{x} + 1\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}} + 1\right)'$

$$= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad ; \quad f''(x) = \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \quad ;$$

$f''(x) = 0$ denkleminin kökü yoktur, fakat $x = 0$ noktası tanım kümesindedir ve bu noktada $f'(0)$ ve $f''(0)$ türevleri mevcut değildir. f'' nün işaret tablosu aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$		0		∞
f'' (x)		+	yoktur	-	

Yukarıdaki teste göre fonksiyon $(-\infty, 0)$ da konveks $(0, \infty)$ da konkavdır, $x = 0$ noktası büküm noktasıdır.

2) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^5} = (x-1)^{\frac{5}{3}}$, $f'(x) = \frac{5}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}$;

$f''(x) = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-1}}$;

$f''(x) = 0$ denkleminin kökü yoktur. $x = 1$ noktası tanım kümesindedir ancak bu noktada $f''(1)$ türevi mevcut değildir.

x	$-\infty$	1	∞
$f''(x)$	$-$	yoktur	$+$

Fonksiyon $(-\infty, 1)$ da konkav, $(1, \infty)$ da konvekstir, $x = 1$ büküm noktasıdır.

?

1) $\mathbf{f}: (0, \infty) \to \mathbf{IR}$, $\mathbf{f(x) = \ln x}$

2) $\mathbf{f}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{IR}$, $\mathbf{f(x) = \sin x}$

3) $\mathbf{f}: \mathbf{IR} \to \mathbf{IR}$, $\mathbf{f(x) = e^x}$

fonksiyonlarının konveks, konkav olduğu aralıkları ve büküm noktalarını araştırınız.

Cevaplarınız şu şekilde olmalıydı.

1) Tüm tanım kümesinde konkavdır ve büküm noktası yoktur,

2) $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ aralığında konveks , $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ de konkav, $x = 0$ büküm noktasıdır,

3) IR üzerinde konvekstir, büküm noktası yoktur.

Fonksiyonların monotonluk, ekstremum, konvekslik ve konkavlığı gibi özellikleri onun grafiğinin çiziminde önemli rol oynarlar. Grafik çizimi için gereken işlemler aşağıdaki gibi verilebilir.

Grafik Çizimi

1) **Fonksiyonun tanım kümesi açık olarak verilmemişse önce tanım kümesi bulunur.**

2) **Tanım kümesini oluşturan aralıkların uçlarında fonksiyonun soldan ve sağdan limitleri bulunur.**

3) Fonksiyonun türevi bulunur, kritik noktalar belirlenir ve türevin işaret tablosu oluşturulur.

4) İşaret tablosuna göre fonksiyonun artan, azalan olduğu aralıklar ve ekstremum noktaları belirlenir.

5) İkinci türev bulunur ve ikinci türevin işaret tablosu oluşturulur.

6) İkinci türevin işaret tablosuna göre fonksiyonun konveks ve konkav olduğu aralıklar ve büküm noktaları bulunur.

7) $x = 0$ için fonksiyon değeri hesaplanarak y - ekseni ile kesişim noktası bulunur. Sonra, eğer mümkünse, $f(x) = 0$ denklemi çözülerek x - ekseni ile kesişim noktaları bulunur.

Bu işlemleri yaptıktan sonra fonksiyonun grafiğinin çizimi oldukça kolaylaşır.

Not: 2). şıktaki işlemler yapılırken fonksiyon grafiğinin (eğer varsa) asimptotları da bulunmuş olur. Öyle ki: Eğer $x \to a^-$ veya $x \to a^+$ iken $f(x)$ in limiti sonsuz ise (ister artı sonsuz, isterse de eksi sonsuz) o zaman $x = a$ doğrusu bir (düşey) asimptottur.

Eğer $x \to -\infty$ veya $x \to \infty$ iken $f(x) \to b$ ise o zaman $y = b$ doğrusu bir (yatay) asimptottur.

Örnek:

1) $y = x^3 - 3x - 2$

2) $y = ax^2 + bx + c, \quad a > 0, \; b^2 - 4\,ac < 0$

fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

Çözüm:

1) $f(x) = x^3 - 3x - 2$ fonksiyonu polinom fonksiyon olduğundan tanım kümesi
$IR = (-\infty, \infty)$ dur.
$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x - 2) = -\infty$ ve $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - 3x - 2) = \infty$ dur. Yatay ve düşey asimptot yoktur.

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, \; x = 1$$

türevin kökleridir. Türevin işaretini inceleyerek fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyelim.

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	∞

Tabloya göre fonksiyon $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ aralıklarında kesin artan, $(-1, 1)$ aralığında kesin azalandır. $x = -1$ noktası yerel maksimum, $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 2 = 0$ yerel maksimum değeridir. $x = 1$ yerel minimum noktası, $f(1) = 1^3 - 3.\,1 - 2 = -4$ yerel minimum değeridir.

$f''(x) = 6x$, $6x = 0 \Rightarrow x = 0$ ikinci türevin köküdür. İkinci türevin işaretini inceleyerek fonksiyonun konveks ve konkav olduğu aralıkları belirleyelim.

x	$-\infty$		0		∞
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		konkav	-2	konveks	

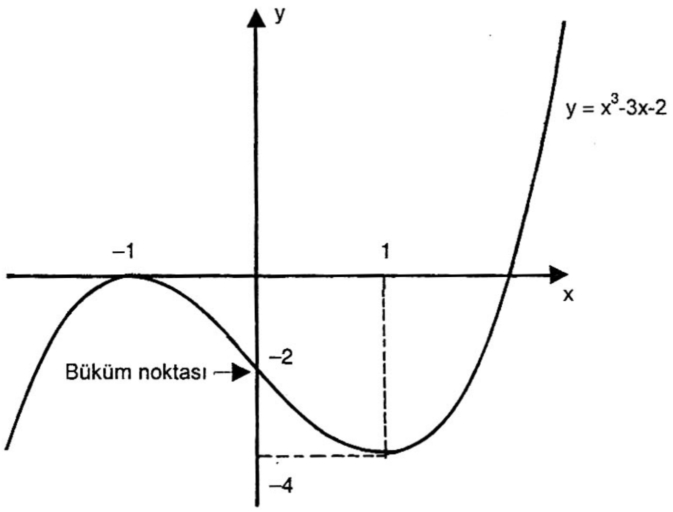
Tabloya göre, fonksiyon $(-\infty, 0)$ aralığında konkav, $(0, \infty)$ aralığında konvekstir. $x = 0$ büküm noktasıdır.

$x = 0$ için $f(0) = -2$ dir.

$y = 0$ için $x^3 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1$;

Fonksiyon x-eksenini $x = -1$ ve $x = 2$ de kesmektedir. ($x = -1$ in iki kat kök olduğuna dikkat ediniz). Bütün bu bilgileri tek bir tabloda berliştirip bu tabloya göre grafiği çizelim.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		∞
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+		+	
$f''(x)$		-		-	0	+		+		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞



Şekil 10.4

2) $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ fonksiyonu da polinom fonksiyon olduğundan tanım kümesi IR = $(-\infty, \infty)$ dir. $a > 0$ olduğundan

$$\lim_{x \to -\infty} (ax^2 + bx + c) = \infty , \quad \lim_{x \to \infty} (ax^2 + bx + c) = \infty$$

dur. Yatay ve düşey asimptot yoktur.

$$f'(x) = 2ax + b, \quad 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

türevin köküdür. Türevin işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		∞
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	∞	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	∞

Tabloya göre fonksiyon $\left(-\infty , -\frac{b}{2a}\right)$ aralığında azalan, $\left(-\frac{b}{2a} , \infty\right)$ aralığında artandır. $x = -\frac{b}{2a}$ yerel minimum noktası, $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}$ yerel minimum değeridir.

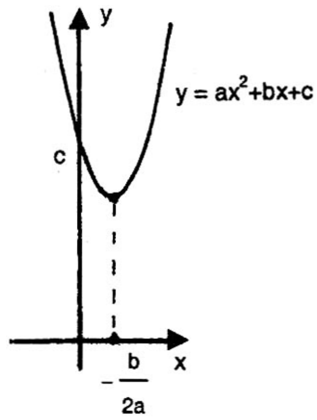
$f''(x) = 2a > 0$ olduğundan fonksiyon tanım kümesi üzerinde konvekstir ve büküm noktası yoktur.

$x = 0$ için $f(0) = c$,

$y = 0$ için $ax^2 + bx + c = 0$,

$b^2 - 4ac < 0$ olduğundan gerçel kök yoktur. Eğri x - eksenini kesmemektedir. Bu bilgileri bir tabloda birleştirip grafiğini çizelim.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		∞
$f'(x)$		-	0	+	
$f''(x)$		+		+	∞
$f(x)$	∞	$\searrow$	$\frac{4ac - b^2}{4a}$	$\nearrow$	∞



Şekil 10.5

$a > 0$ ve $b^2 - 4ac < 0$ olduğundan $c > 0$ olmak zorunda olduğunu görünüz.

$y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda minimun noktasının parabolün tepe noktası olduğuna ve tepe noktasının apsisinin türevin kökü, ordinatının ise fonksiyonun bu noktadaki değeri olduğuna dikkat ediniz.

?

$y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda $a < 0$ ise fonksiyonun yerel minimum nok- $x = -\frac{b}{2a}$ olduğunu ve fonksiyonun konkav olduğunu gösteriniz.

Yukarıdaki örneklerde olduğu gibi polinom fonksiyonların yatay ve düşey asimptotları yoktur.

Daha önceki ünitelerde rasyonel, üstel, logaritmik ve trigonometrik fonksiyonların grafiklerini fazla ayrıntıya girmeden sezgisel bir yaklaşımla çizmiştik. Türev kavramı, bu fonksiyonların grafiği dediğimiz eğrilerin çiziminin ve fonksiyon davranışlarının daha ayrıntılı incelenmesine imkan verir.

Örnek:

Aşağıdaki fonksiyonların, tanım kümelerini, artan, azalan oldukları aralıkları, ekstremum noktalarını, konveks ve konkav oldukları aralıkları, büküm noktalarını ve asimptotlarını araştırarak grafiklerini çizelim:

1) $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ 2) $y = (1,5)^x$

3) $y = e^{-x}$ 4) $y = \ln x$

5) $y = \sin x$ 6) $y = \tan x$

Çözüm:

1) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ fonksiyonu paydanın kökü olan $x = 1$ noktasında tanım olmadığından tanım kümesi, $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ dur.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+3}{x-1} = 2$ olduğundan $y = 2$ yatay asimptottur. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x+3}{x-1} = -\infty$ olduğundan $x = 1$ düşey asimptottur. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+3}{x-1} = 2$ ve $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x+3}{x-1} = \infty$ dur. Bu sonuçlara göre de $x = 1$ düşey asimptot, $y = 2$ yatay asimptottur.

$$f'(x) = \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)' = \frac{(2x+3)'(x-1) - (2x+3)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-5}{(x-1)^2}\right)' = (-5)\left((x-1)^{-2}\right)' = (-5)(-2)(x-1)^{-3} \cdot 1$$

$$\frac{10}{(x-1)^3} \quad ;$$

Hem birinci ve hem de ikinci mertebeden türevlerin kökü yoktur ve bu türevlerin işaret tablosu aşağıdaki gibidir:

x	$-\infty$		1		∞
f'(x)		-	‖	-	
f(x)	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

x	$-\infty$	1	∞
f''(x)	-	‖	+
f(x)	konkav	‖	konveks

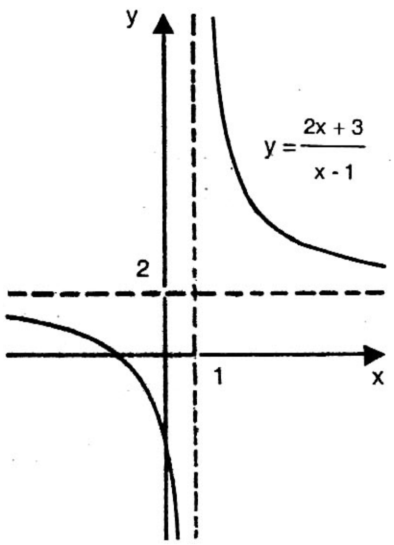
Yukarıdaki tablolara göre, fonksiyon $(-\infty, 1), (1, \infty)$ aralıklarında kesin azalandır ve ekstremum noktası yoktur. Fonksiyon $(-\infty, 1)$ aralığında konkav, $(1, \infty)$ aralığında konvekstir. $x = 1$ noktasında fonksiyon tanımlı ve dolayısıyla sürekli olmadığından, bu noktada ikinci türev işaret değiştirmesine rağmen $x = 1$ büküm noktası değildir. Fonksiyonun büküm noktası yoktur. Grafiğin eksenleri kestiği noktalar,

$$x = 0 \qquad \text{için} \qquad y = \frac{2 . 0 + 3}{0 - 1} = -3$$

$$y = 0 \qquad \text{için} \qquad \frac{2x + 3}{x - 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 3 = 0 \quad , \quad x = \frac{3}{2}$$

dir. Tüm bilgileri topladığımız tabloyu oluşturup grafiği çizelim.

x	$-\infty$		$-3/2$		0		1		∞
f'(x)		-	|	-	|	-	‖	-	
f''(x)		-	|	-	|	-	‖	+	
f (x)	2	↘	0	↘	-3	↘	$-\infty$ ‖ ∞	↘	2



Şekil 10.6

2) $f(x) = (1,5)^x$ fonksiyonu üstel fonksiyondur ve tanım kümesi $IR = (-\infty, \infty)$ dur. $\lim_{x \to -\infty} (1,5)^x = 0$ olduğundan $y = 0$ (x-ekseni) yatay asimptottu
Ayrıca $\lim_{x \to \infty} (1,5)^x = \infty$ dur.

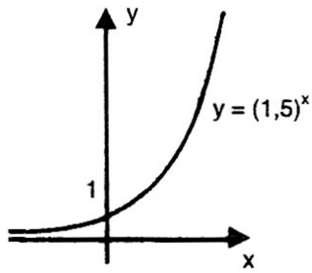
$f'(x) = (1,5)^x \ln 1,5$, $f''(x) = (1,5)^x (\ln 1,5)^2$;

Her $x \in IR$ için $(1,5)^x > 0$ olduğundan birinci ve ikinci mertebeden türevin kökü yoktur. Ayrıca $\ln 1,5 > 0$ olduğundan her $x \in IR$ için $f'(x) > 0$ ve $f''(x) > 0$ dır.

Fonksiyon kesin artan ve konvekstir. Ekstremum ve büküm noktası yoktur.

$x = 0$ için $y = (1,5)^0 = 1$, $y = 0$ için $(1,5)^x = 0$ denklemi elde edilir, bunun ise kökü yoktur.
Bu bilgilere göre, tablo ve grafik aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		+		+	
$f''(x)$		+		+	
$f(x)$	0	↗	1	↗	∞



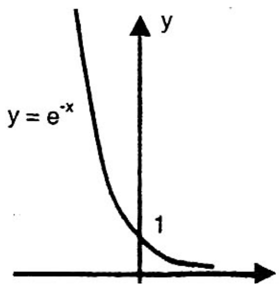
Şekil 10.7

3) $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonunun tanım kümesi $IR = (-\infty, \infty)$ dur. $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$,
$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$ olduğundan $y = 0$ doğrusu yatay asimptottur.
$f'(x) = -e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$

dir. Her $x \in IR$ için $e^{-x} > 0$ olduğundan, her $x \in IR$ için $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ dır. Buna göre fonksiyon kesin azalan ve konvekstir. Ekstremum ve büküm noktası yoktur.

$x = 0$ için $e^{-0} = 1$, $e^{-x} = 0$ denkleminin kökü yoktur. Tablo ve grafik aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		-		-	
$f''(x)$		+		+	
$f(x)$	∞	↘	1	↘	0



Şekil 10.8

$y = (1,5)^x$, $y = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ fonksiyonlarından birincisinde $a = 1,5 > 1$, ikincisindıa $= \frac{1}{e} < 1$ dir. $y = (1,5)^x$ in kesin artan, $y = e^{-x}$ in kesin azalan olduğunu gördük. Bu bilgilerin ünite 5 de gördüğünüz, "$y = a^x$ fonksiyonunda $a > 1$ ise fonksiyon kesin artan, $0 < a < 1$ ise fonksiyon azalandır" bilgisini doğruladığına dikkat ediniz.

4) $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun tanım kümesi $(0,\infty)$ aralığıdır. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ olduğundan $x = 0$ düşey asimptottur. $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$ dur.

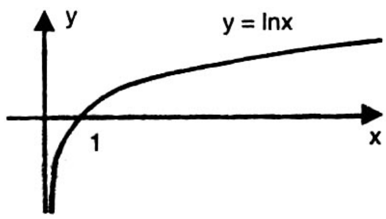
$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad ;$$

$x \in (0,\infty)$ için $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ dır. Buna göre fonksiyon kesin artan ve konkavdır. Türevlerin kökü olmadığından ekstremum ve büküm noktası yoktur.

$x = 0$ için y tanımsızdır. $y = 0$ için $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$ dir.

Tablo ve grafik aşağıdaki gibidir.

x	0		1		∞
f'(x)		+		+	
f''(x)		-		-	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↗	∞



Şekil 10.9

5) $f(x) = \sin x$ fonksiyonu her yerde tanımlı olup 2π periyotlu olduğundaı x i $[0, 2\pi]$ aralığından alacağız. $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x \to 2\pi} \sin x = 0$ dır. Yatay ve düşey asimptot yoktur.

$$f(x) = \sin x \quad , \quad f'(x) = \cos x \quad , \quad f''(x) = -\sin x \quad ;$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ birinci türevin kökleri,

$f''(x) = -\sin x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $x_3 = 2\pi$ ikinci türevin kökleridir.

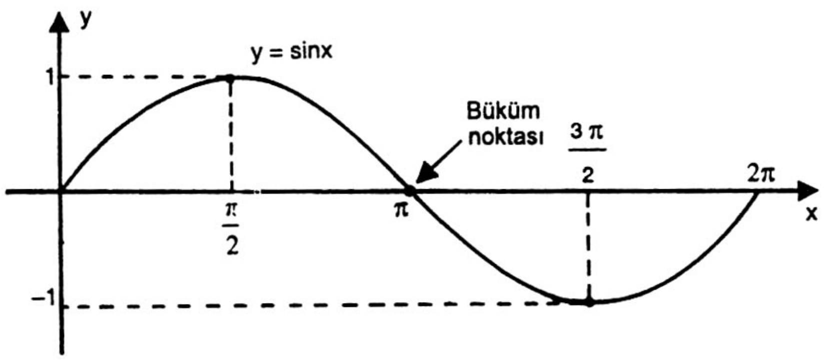
Birinci ve ikinci türevler için işaret tabloları aşağıdaki gibidir.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	0	↗	1	↘	-1	↗	0

x	0		π		2π
f''(x)		-	0	+	
f(x)		konkav		konveks	

Fonksiyon $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ de kesin artan, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ de kesin azalandır, $(0, \pi)$ de konkav, $(\pi, 2\pi)$ de konvekstir. $x = \frac{\pi}{2}$ yerel maksimum, $x = \frac{3\pi}{2}$ yerel minimumdur. $x = \pi$ noktası ise büküm noktasıdır.

28 sayfa



Şekil 10.10

5) f(x) = tan x fonksiyonunun tan m kümesi $\left\{x \in IR \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$ dir.

tan x fonksiyonu π periyotlu olduğundan x i$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ açık aralığından alacağız.

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$ olduğundan $x = -\frac{\pi}{2}$ ve $x = \frac{\pi}{2}$ doğruları düşey asimptottur.

$f(x) = \tan x$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $f''(x) = \left(\cos^{-2} x\right)' = (-2) \cdot \cos^{-3} x \cdot (\cos x)' =$

$= (-2) \cos^{-3} x \cdot (-\sin x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$;

Her $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ için $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ olduğundan fonksiyon bu aralıkta kesin artandır ve ekstremumu yoktur. Birinci ve ikinci türevlerin işaret tabloları şöyledir:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	∞

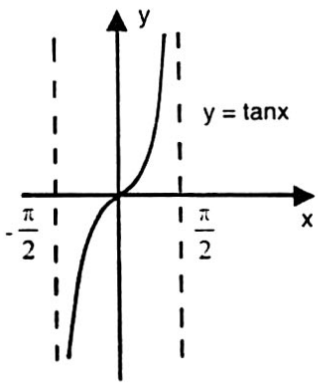
x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		konkav	0	konveks	

$\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right.$ aralığında $\cos x > 0$ olduğunu hatırlayınız$\left.\right)$. II. türev tablosuna göre,

$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ da fonksiyon konkav, $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ de konveks, $x = 0$ büküm noktasıdır.

$x = 0$ iken $y = 0$ ve $y = 0$ iken $x = 0$ dır.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+		+
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$		$\nearrow$ ∞



Şekil 10.11

?

1) $y = \log_a x$ (a >1) fonksiyonunun kesin artan ve konkav olduğunu gösteriniz.
2) $y = \cos x$ ($0 < x < 2\pi$) fonksiyonunun kesin artan ve azalan olduğu aralıkları, konveks ve konkav olduğu aralıkları, ekstremumlarını ve büküm noktalarını bulunuz.
Cevaplarınız şöyle olmalıdır:

2) Fonksiyon $(0,\pi)$ de kesin azalan, $(\pi, 2\pi)$ de kesin artandır; $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ de konkav, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ de konvekstir, $x = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \frac{3\pi}{2}$ noktaları büküm noktalarıdır.

4. Ekstremum Problemleri

Bu bölümde türev yarıdımı ile çözülebilen bir kaç ekstremum problemini ele alacağız.

Örnek:

Toplamları 100 olan öyle iki sayı bulunuz ki birincinin kübü ile ikincinin çarpımı maksimum olsun.

Çözüm:

Birinci sayı x ise ikinci sayı $100 - x$ olur. O zaman $x^3\,(100 - x)$ ifadesi maksimum olmalıdır. $f(x)$ fonksiyonu olarak $x^3(100 - x)$ i alırsak o zaman $f(x)$ in maksimum değerini bulmamız gerekmektedir.

$$f(x) = 100\,x^3 - x^4,\ f'(x) = 300\,x^2 - 4x^3,\ f''(x) = 600x - 12x^2\,;$$

$$f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow 300\,x^2 - 4x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2\,(75 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ve } \ x = 75.$$

Kritik değerler $x = 0$ ve $x = 75$ dir. $x = 0$ problemin çözümü olamayacağından $x = 75$ için

$$f''(75) = 600.\ 75 - 12.\ 75^2 = 45000 - 67500 = -22500 < 0$$

olduğundan $x = 75$ maksimum noktasıdır.

Cevap olarak bu sayılar 75 ve $100 - 75 = 25$ olmalıdır.

Örnek:

Çevresinin uzunluğu 20 m olan bir dikdörtgenin alanının maksimum olması için bu dikdörtgenin boyutları ne olmalıdır?

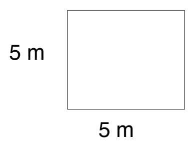
Çözüm:

Boyutlar x ve y ise $2(x + y) = 20$ ve $S = xy$ alanı maksimum olmalıdır.
$x + y = 10$; $y = 10 - x$ olduğundan

$S(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$ fonksiyonunun maksimumu bulunmalıdır.

$$S'(x) = 10 - 2x\ , \qquad S''(x) = -2\,;$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5.$$



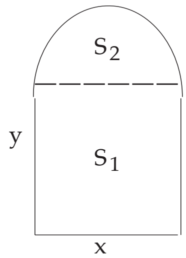
$S''(5) < 0$ olduğundan $x = 5$ maksimum noktasıdır. O zaman $y = 10 - x = 10 - 5 = 5$ bulunur ve dolayısıyla çevre uzunluğu verildiğinde alanın maksimum olması için dikdörtgen kare olmalıdır.

Örnek:

Bir odanın bir penceresinin aşağısı dikdörtgen, yukarısı ise yarım daire şeklindedir. Pencerenin çevresinin uzunluğu 7 m dir. Pencereden odaya maksimum ışık düşebilmesi için onun boyutları ne olmalıdır?

Çözüm:

Düşen ışığın maksimum olması için pencerenin S alanı maksimum olmalıdır. S_1 dikdörtgenin alanı, S_2 ise yarımdairenin alanı olmak üzere, $S = S_1 + S_2$ dir.



Dikdörtgenin boyutları x ve y olsun. O zaman pencere çevresinin uzunluğu

$$x + 2y + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{x}{2}$$

olur. $S_1 = xy$, $S_2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2$ olduğundan

$$S = S_1 + S_2 = xy + \frac{\pi x^2}{8}$$

olur. Çevre uzunluğu 7 m olduğundan

$$x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 7 \Rightarrow 2y = 7 - \frac{\pi x}{2} - x \Rightarrow y = \frac{7 - \frac{\pi x}{2} - x}{2},$$

buradan

$$S(x) = x \cdot \frac{7 - \frac{\pi x}{2} - x}{2} + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{7x - \frac{\pi x^2}{2} - x^2}{2} + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{4\left(7x - \frac{\pi x^2}{2} - x^2\right) + \pi x^2}{8} =$$

$$= \frac{28x - 2\pi x^2 - 4x^2 + \pi x^2}{8} = \frac{28x - 4x^2 - \pi x^2}{8}$$

elde edilir. Böylece, pencerenin S alanı onun x tabanının fonksiyonu olarak bulunmuş oldu. Bu fonksiyonun x e göre maksimumunu bulmamız gerekiyor. Fonksiyonun türevlerini alalım:

$$S'(x) = \left(\frac{28x - 4x^2 - \pi x^2}{8}\right)' = \frac{28 - 8x - 2\pi x}{8} \ , \ S''(x) = \left(\frac{28 - 8x - 2\pi x}{8}\right)' = \frac{-8 - 2\pi}{8} = -\frac{4+\pi}{4} \ ;$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{28 - 8x - 2\pi x}{8} = 0 \Leftrightarrow (8 + 2\pi)\, x = 28 \Leftrightarrow x = \frac{28}{8 + 2\pi} = \frac{14}{4 + \pi} \cong 1{,}96 \, .$$

Kritik noktada S'' ikinci türev negatif olduğundan (aslında S'' her yerde negatif tir) $x \cong 1{,}96$ maksimum noktasıdır.

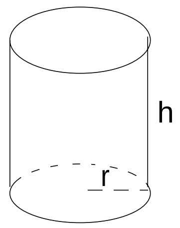
Cevap olarak $x \cong 1{,}96$ m , $y \cong 0{,}98$ m bulunur.

Örnek:

Hacmi 1500 cm^3 olan silindir şeklinde üstü kapalı metal kutu yapılacaktır. Gerekli metal miktarının minimum olması için silindirin boyutları (taban yarıçapı ve yükseklik) ne olmalıdır?

Çözüm:

Silindirin taban yarıçapı r, yüksekliği h olsun. Silindirin hacmi $V = \pi r^2 . h = 1500$ cm^3 dür. Metal miktarının minimum olması için toplam yüzey alanı (yan yüzeyinin alanı artı taban alanları) minimum olmalıdır.



Yan yüzeyi alanı $2\pi rh$, taban alanları toplamı $2\pi r^2$ dir. Buna göre toplam yüzey alanı

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

olur. $\pi r^2 . h = 1500 \Rightarrow h = \dfrac{1500}{\pi r^2}$ bulunur. Bunu yukarıda yazarsak

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \, . \, \frac{1500}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{3000}{r}$$

olur. A yüzey alanı r nin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyonun r ye göre minimumu bulunmalıdır. Türevleri alalım:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{3000}{r^2}\ ,\ A''(r) = 4\pi + \frac{6000}{r^3}\ ,$$

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow\ 4\pi r - \frac{3000}{r^2} = 0 \Leftrightarrow\ r^3 = \frac{3000}{4\pi}\ \Leftrightarrow\ r = \sqrt[3]{\frac{3000}{4\pi}} \cong 6{,}2\ .$$

İkinci türev testine göre $r \cong 6{,}2$ cm minimum noktasıdır. Yükseklik ise

$$h = \frac{1500}{\pi r^2} \cong \frac{1500}{\pi\ .\ 38{,}4} \cong \quad 12{,}4 \text{ cm}$$

olarak bulunur.

?

1) Hangi gerçel sayı için bu sayı ile onun karesi farkı en büyük olur?
2) Odanın penceresinin aşağısı dikdörtgen, yukarısı ise eşkenar üçgen şeklindedir. Pencerenin çevre uzunluğu 3 m olduğuna göre pencere alanının maksimum olması için taban uzunluğu ne olmalıdır?

Cevaplarınız 0,5 ve 0,7 m olmalıdır.

Değerlendirme Soruları

1. $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 6$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktaları aşağıdakilerden hangisidir?
   A. $x = -1$
   B. $x = 2$
   C. $x = -1$ ve $x = 2$
   D. $x = -1$ ve $x = 4$
   E. $x = -2$ ve $x = 2$

2. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ fonksiyonunun büküm noktası aşağıdakilerden hangisidir?

   A. $x = \frac{3}{2}$

   B. $x = \frac{1}{2}$

   C. $x = -\frac{1}{2}$

   D. $x = -\frac{3}{2}$

   E. Yoktur

3. $y = x\ln x$ fonksiyonunun kesin artan olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A. $(0, \infty)$

B. $(0, \frac{1}{e})$

C. (e, ∞)

D. $(\frac{1}{e}, \infty)$

E. $(1, \infty)$

4. $y = \frac{2 - 3x}{x + 2}$ fonksiyonunun grafiğinin tüm asimptotları aşağıdakilerden hangisidir?

A. $x = -2$ doğrusu

B. $x = -3$ doğrusu

C. $x = -2$ ve $y = 0$ doğruları

D. $x = -2$ ve $y = -3$ doğruları

E. $x = 0$ ve $y = -3$ doğruları

5. Aşağıdakilerden hangisi $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} + 5$ fonksiyonunun yerel minimumudur?

A. $x = 0$

B. $x = 0$ ve $x = -2$

C. $x = -2$

D. $x = 1$

E. Yoktur

6. $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} + 5$ fonksiyonunun büküm noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A. $x = -2$

B. $x = -1$

C. $x = 0$

D. $x = 1$

E. Yoktur

7. $y = x + \ln x$ fonksiyonunun konkav olduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?
A. $(0, 1)$
B. $(0, e)$
C. (e, ∞)
D. $(0, \infty)$
E. $(1/e, \infty)$

8. $y = \cos^2 x$ fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde konvekstir?
A. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$
B. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
C. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
D. $(0, \pi)$
E. $(0, 2\pi)$

9. $y = \cot^2 x$ fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde kesin azalandır?
A. $(0, \pi)$
B. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
C. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
D. $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$
E. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

10. $y = x + \frac{1}{x}$ fonksiyonunun tüm kritik noktaları kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
A. $\{-1\}$
B. $\{1\}$
C. $\{0, -1, 1\}$
D. $\{0, 1\}$
E. $\{-1, 1\}$

11. $y = x^2 (1 - x)^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonunun tüm kritik noktaları kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\{0 , 2\}$

B. $\{0\}$

C. $\{2\}$

D. $\left\{0 , \frac{6}{7} , 1\right\}$

E. $\varnothing$

12. $y = xe^x$ fonksiyonunun büküm noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A. $x = -2$
B. $x = -1$
C. $x = 0$
D. $x = 1$
E. $x = 2$

13. Hacmi 1500 cm^3 olan silindir şeklinde üstü açık metal kutu yapılacaktır. Gerekli metal miktarının minimum olması için silindirin boyutları (r taban yarıçapı ve h yüksekliği) ne olmalıdır?

A. $r \cong 5,81$ cm , $h \cong 10$ cm
B. $r \cong 6,81$ cm , $h \cong 8,92$ cm
C. $r \cong 6,92$ cm , $h \cong 8,71$ cm
D. $r \cong 7,01$ cm , $h \cong 8,21$ cm
E. $r \cong 7,82$ cm , $h \cong 7,82$ cm

14. Kenarı 6 cm olan eşkenar üçgen içine şekildeki gibi dikdörtgen çizilmiştir. Dikdörtgenin alanının maksimum olması için onun x ve y boyutları kaç olmalıdır?

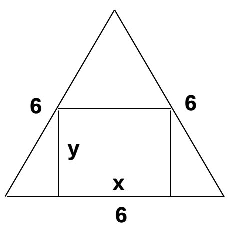
A. $x = \sqrt{3}$ cm , $y = 3$ cm

B. $x = 3\sqrt{3}$ cm , $y = 3$ cr

C. $x = 3$ cm , $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cr

D. $x = \frac{3}{2}$ cm , $y = 3\sqrt{3}$ cm

E. $x = 3$ cm , $y = 3$ cm



15. Pozitif iki sayının çarpımı 384 dür. Birincinin iki katı ile ikincinin kübünün toplamının minimum olması için bu sayılar aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?
    A. 12 ve 32
    B. 24 ve 16
    C. 48 ve 8
    D. 96 ve 4
    E. 192 ve 2

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. D 2. B 3. D 4. D 5. C 6. E 7. D 8. A 9. B 10. E
11. D 12. A 13. E 14. C 15. D