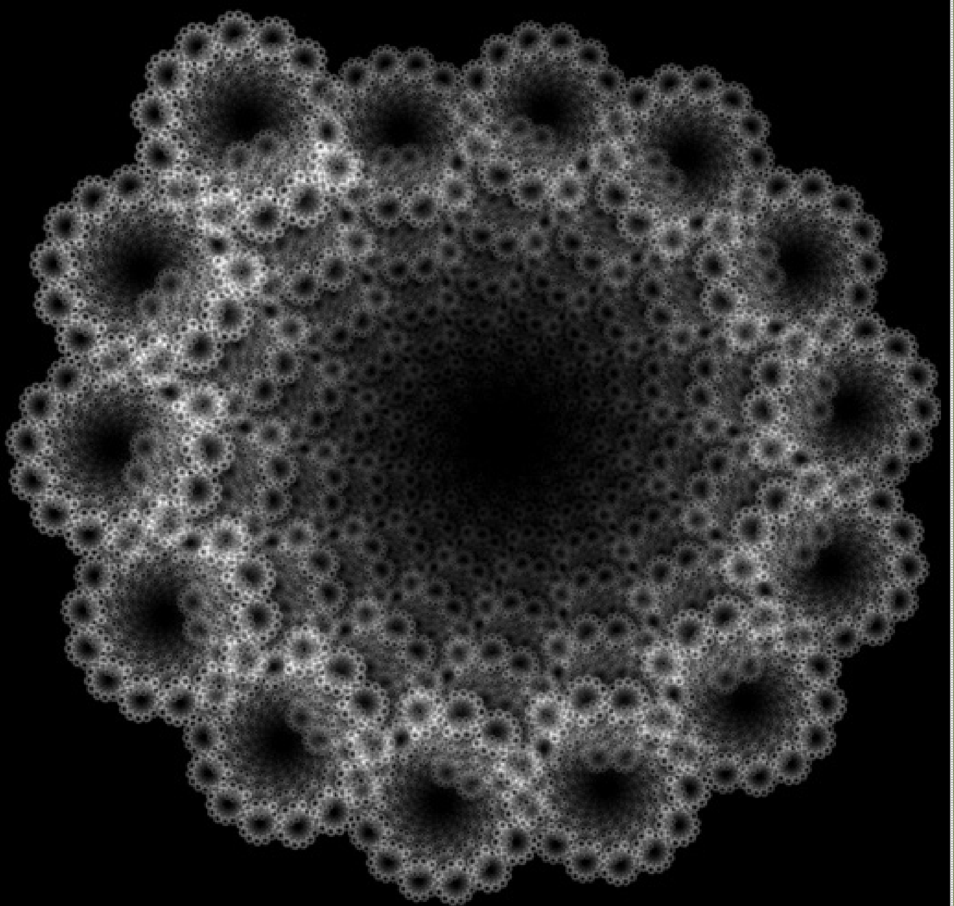
MATEMATİK-I Ders Notları



Tolga GÜYER

Gazi Üniversitesi
Gazi Eğitim Fakültesi
Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi Bölümü, ANKARA

İÇİNDEKİLER

1. ÖNBİLGİLER

1.1. ÖNERMELER MANTIĞI

Doğru (True) ya da Yanlış (False) doğruluk değerlerinden birisine sahip olan ve bir durumu bildiren cümlelere "önerme" adı verilir. Örneğin "Kar beyazdır", "Şeker bir hidrokarbondur" gibi. Elbette bu durum, günlük yaşantımızda dile getirdiğimiz her cümle için geçerli olmayacaktır. Söylediğimiz bazı sözlerin doğruluğu evrensel olarak kesin de olsa, pek çok ifade için herkese göre aynı olan bir doğruluk değeri atamamız kolay olmayacaktır. Örneğin "Kırmızı güzel bir renktir" gibi. Zira bu ifadenin doğruluk değeri kimileri için Doğru, kimileri için Yanlış olabilir. Hatta bazıları bu ifadeyi kısmen doğru bulabilir.

Ancak temelleri çok eskilerde atılan ve insan zekâsının düşünme sistemini, daha doğrusu karar verme işlemini modellemeyi amaçlayan önermeler mantığı, önermeler üzerinde bazı mantıksal hesaplamaları da gerektirdiğinden, her önermenin T ya da F (1 ya da 0) gibi bir doğruluk değerine sahip olduğu varsayımı ile başlamaktadır.

Milattan önce 384-322 yılları arasında yaşamış olan eski Yunanlı düşünür Aristo'dan önce mantık, sadece matematik, fen bilimleri ve felsefe konuları ile sınırlı bir alanda kullanılmaktadır. Aristo tarafından ortaya konan klasik mantık, mantık ilkelerinin günlük yaşamın birçok problemini anlamak ve açıklamak için de kullanılabileceğini göstermiştir.

Ünlü filozof Bertrand Russell, temelleri 2300 yıl önce Aristo tarafından atılan bu klasik mantığı esas alarak, önerme mantığı için üç temel kural tanımlamıştır: Eşdeğerlik kuralı, doğruluk değeri kuralı ve karşıtlık kuralı. Bu üç kural, önerme mantığını anlamak için iyi bir başlangıç olabilir.

1.1.1. Eşdeğerlik Kuralı

Bu kural, her özgün düşüncenin kendisine eşdeğer olduğunu söyler. Örneğin, "Ankara, Ankaradır" ya da "insan, insandır" gibi.

1.1.2. Doğruluk Değeri Kuralı

Her ifadenin tek bir doğruluk değeri vardır: Doğru (True) ya da Yanlış (False). Herhangi bir ifadenin başka bir doğruluk değerine sahip olma şansı yoktur. Diğer bir deyişle, bir ifade kısmen doğru ya da kısmen yanlış olamaz.

1.1.3. Karşıtlık Kuralı

Karşıtlık kuralına göre bir ifade ve onun karşıtı, farklı doğruluk değerlerine sahip olacaktır.

Örneğin,

"Hayat güzeldir"

ifadesi ile bunun karşıtı olan,

"Hayat güzel değildir"

ifadelerinden birincisi Doğru ise ikincisi Yanlış, birincisi Yanlış ise ikincisi Doğru doğruluk değerine sahip olacaktır.

1.1.4. Mantıksal Bağlaçlar

Önermeler, *mantıksal bağlaçlarla* bir araya getirilerek *mantıksal ifadeler* elde edilir. Bu bağlaçlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\wedge$: VE Bağlacı
$\vee$: VEYA Bağlacı
$\Rightarrow$: GEREKTİRME Bağlacı
$\Leftrightarrow$: ÇİFT YÖNLÜ GEREKTİRME Bağlacı

Bir önermenin karşıtı (ya da değili) ise $\neg$ önek simgesi ile gösterilir.

Örneğin p önermesi "kar beyazdır", q önermesi ise "hava açıktır" olarak belirlenmiş ise, bu durumda $p \wedge q$, "kar beyazdır ve hava açıktır" biçiminde ifade edilecektir.

r önermesi "sıcaklık yüksektir" ifadesine karşılık geliyor ise, $q \Rightarrow r$ ifadesi "Hava açık ise sıcaklık yüksektir" şeklinde olur.

1.1.5. Atomlar ve Formüller

Önermeler mantığında her bir önerme, bu sistematiğin en küçük yapıtaşı olması nedeniyle, *atomik formül* ya da kısaca *atom* olarak adlandırılır.

İyi-tanımlı formül ya da kısaca *formül* olarak adlandırılan mantıksal ifadeler ise aşağıdaki kurallar kullanılarak oluşturulurlar:

1. Her atom, bir formüldür.
2. Eğer G bir formül ise, $\neg G$ de bir formül olur.
3. Eğer G ve H formül ise, $G \wedge H$, $G \vee H$, $G \Rightarrow H$ ve $G \Leftrightarrow H$ de formül olur.
4. Bütün formüller yukarıdaki kurallar uygulanarak elde edilirler.

Örnek 1.1

Aşağıdaki önermeleri göz önüne alalım:

p = "Havadaki nem oranı yüksektir"
q = "Sıcaklık yüksektir"
r = "İnsanlar kendilerini iyi hissederler"

Bu durumda,

$$(p \wedge q) \Rightarrow \neg r$$

bir formüldür. Bu formülün anlamı ise,

“Havadaki nem oranı ve sıcaklık yüksek olduğunda insanlar kendilerini iyi hissetmezler”

şeklinde olacaktır.

<u>Örnek 1.2</u>

Aşağıdaki önermeleri göz önüne alalım:

p = “Yağmur yağar”
q = “Hava serinler”

Bu durumda,

$$p \Rightarrow q$$

formülünün anlamı,

“Yağmur yağarsa hava serinler”

olacaktır. Ancak bunun tersi olan $q \Rightarrow p$ formülünü, yani “Hava serin ise yağmur yağıyordur” sonucunu ilk formülden çıkarmamız mümkün değildir. Çünkü havanın serin olması, yağmurun yağıyor olmasını gerektirmez. Hava başka bir sebepten de soğuk olabilir. İşte burada, $\Leftrightarrow$ simgesinin farklılığı ortaya çıkmaktadır. Çift yönlü gerektirme, her iki taraf da birbirini gerektirdiğinde kullanılmaktadır.

Örneğin,

p = “Hava soğuktur”
q = “İnsanlar üşürler”

durumunda, $p \Leftrightarrow q$ formülü doğru bir ifade olacaktır. Çünkü havanın soğuk olması ve insanların üşümesi, birbirlerini çift yönlü olarak gerektirir. Diğer bir gösterimle,

$$p \Leftrightarrow q = p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$$

olur.

1.1.6. Formüllerin Yorumlanması

Önermesel mantığın en önemli uğraşlarından birisi de, farklı doğruluk değerlerine sahip önermelerin bu bağlaçlar kullanılarak bir araya gelmesiyle oluşturulan mantıksal ifadelerin, yani formüllerin doğruluk değerlerinin araştırılmasıdır.

İki önermeden oluşan bir formülü oluşturan her iki önerme için de doğruluk değeri açısından iki durum vardır. Dolayısıyla, örneğin $p \wedge q$ formülü için dört durum söz konusu olacaktır: p’nin T, q’nun T değerini aldığı durum; p’nin T, q’nun F değerini aldığı durum; p’nin F, q’nun T değerini aldığı durum ve son olarak p’nin F, q’nun F değerini aldığı durum.

$p \wedge q$ formülü, ve bağlacının özelliği gereğince ancak her iki önermenin de doğru değeri aldığı durumda doğru değerini alacak, diğer bütün durumlarda yanlış değerini alacaktır. Bu durumların her birine formülün bir *yorumu* adı verilir. İçerdiği önermelerin doğruluk değerlerine göre formülün doğruluk değerinin hesaplanması işlemine de formülün *yorumlanması* denir. Bir formül bazı yorumlamalarda T değerini alırken, bazı yorumlamalarda F değerini alabilir. Genel olarak n tane önermeden oluşan bir formülün olası 2^n tane yorumlaması vardır. Bir formül için bu yorumlamaların tümünün gösterildiği çizelgeye, o formüle ait *doğruluk tablosu* adı verilir.

Şimdi iki önermeden oluşan ve bağlaçların temel kurallarını oluşturan basit formüllerin doğruluk tablolarını oluşturalım.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Görüldüğü gibi p ve q önermelerinin her ikisinin de doğru olduğu yorumlama dışında $p \wedge q$ formülü yanlış değerini alır. Örneğin p önermesi "eve gidiyorum", q önermesi "yağmur yağıyor" ifadelerine karşılık geliyorsa $p \wedge q$ formülü "eve gidiyorum ve yağmur yağıyor" şeklinde ifade edilebilir. Eğer p ve q önermelerinin her ikisi de doğru ise, yani eve gidiyorsam ve yağmur yağıyor ise bu formül doğru olacaktır.

Ancak iki durumdan birisi ya da her ikisi de yanlış ise ifademiz de yanlış olacaktır. Örneğin yağmur yağmıyor ise bu formül doğru olmayacaktır.

Şimdi $p \vee q$ formülüne bakalım:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Görüldüğü gibi p ve q önermelerinin her ikisinin de yanlış olduğu durum dışında $p \vee q$ formülü doğru olacaktır. Önceki örneğimize dönecek olursak, bu kez formülümüzü "eve gidiyorum veya yağmur yağıyor" biçiminde dile getirebiliriz. Bu durumda eve gitmem ya da yağmurun yağması olaylarından en az birisinin gerçekleşmesi, söylediğim cümlenin doğru olması için yeterli olacaktır.

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Gerektirme bağlacında ise durum yukarıdaki gibi olacaktır. Diğer bir deyişle $p \Rightarrow q$ ifadesi, p'nin T, q'nun F olduğu durumda yanlış olacaktır; diğer durumlarda doğru olur.

Bunu bir örnekle açıklayalım: p önermesini “yağmur yağdı”, q önermesini “yerler ıslandı” ifadelerine karşılık getirelim. Bu durumda p⇒q ifadesi “yağmur yağdı ise yerler ıslandı” olacaktır.

Önce olumlu durumları göz önüne alalım:

Eğer p ve q’nun her ikisi de doğru ise, yani yağmur yağmış ve yerler ıslanmış ise bu durumda “yağmur yağdı ise yerler ıslandı” ifadesi doğru olacaktır.

Eğer p ve q’nun her ikisi de yanlış ise, yani ne yağmur yağmış ne de yerler ıslanmış ise bu durumda “yağmur yağdı ise yerler ıslandı” ifadesi ile bir çelişki doğurmayacaktır. Yani ifademiz yine doğru olacaktır.

Eğer p yanlış, q doğru ise, yani yağmur yağmamış ancak yerler ıslanmış ise bu durum da “yağmur yağdı ise yerler ıslandı” ifadesi ile bir çelişki doğurmaz. Çünkü p⇒q ifadesinden, yağmur yağmazsa yerlerin ıslanmayacağı sonucunu çıkaramayız.

Ancak;

Eğer p doğru, q yanlış ise, yani yağmur yağmış ancak yerler ıslanmamış ise bu durum “yağmur yağdı ise yerler ıslandı” ifadesi ile bir çelişki doğurur. Çünkü p⇒q ifadesinde, p gerçekleşmiş ama q gerçekleşmemiştir. Dolayısıyla bu durum F sonucunu verecektir.

Şimdi, bu temel yorumlamaları kullanarak daha karmaşık formüllerin nasıl yorumlanabileceğine bakalım.

Örneğin,

$$G=(p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow \neg s)$$

formülünde yer alan önermeler {p,q,r,s} olarak yazılabilir. Bu önermelere, aynı sıralama ile {T,F,T,T} doğruluk değerlerini atadığımız takdirde;

$(p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow \neg s)$

$(T \wedge F) \Rightarrow (T \Leftrightarrow \neg T)$

$F \Rightarrow (T \Leftrightarrow F)$

$F \Rightarrow F$

T

olur. Yani G formülünün {T,F,T,T} yorumlamasının sonucunda doğruluk değerini T olarak bulmuş oluruz.

Şimdi aynı formül için olası bütün yorumlamaları göreceğimiz doğruluk tablosunu oluşturalım:

p	q	r	s	$\neg s$	$p \wedge q$	$r \Leftrightarrow \neg s$	G
T	T	T	T	F	T	F	F
T	T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	F	T
F	F	F	F	T	F	F	T
F	F	F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
T	F	T	F	T	F	T	T

Formülümüz dört önermeden oluştuğundan, tablomuzda toplam 2^4=16 adet satır bulunmaktadır.

1.1.7. Geçerlilik (Totoloji) ve Tutarsızlık (Çelişki)

Bütün yorumlamaların sonucunda doğru değerini alan formüle *geçerli formül* ya da *totoloji* adı verilir. Diğer bir deyişle, doğruluk tablosunda her satırda T değeri elde edilen bir formül, geçerli bir formül olacaktır.

Örnek olarak tarihten ünlü bir cümle ile başlayalım: William Shakespeare tarafından 1599 ile 1601 yılları arasında yazıldığına inanılan ünlü trajedi Hamlet'in bir sahnesinde oyuncu şu dizeleri söyler: "Olmak, ya da olmamak. İşte bütün mesele…"

Şimdi bu cümleyi önermeler mantığında sembolik olarak ifade edelim: p önermesi "olmak" fiilini gösteriyor ise, "olmak ya da olmamak" cümlesini

$$p \vee \neg p$$

şeklinde gösterebiliriz. Şimdi bu ifade için doğruluk tablosunu yapalım:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

Görüldüğü gibi bu ifade her durumda T değerini almaktadır. Böylece sanat tarihine mal olmuş bu ünlü sözün, aslında bir totoloji olduğunu anlamaktayız.

Şimdi biraz daha karmaşık olan

$$G = ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

formülünü göz önüne alalım. Bu formülde toplam iki önerme olduğundan, dört tane yorumlaması olacaktır. Bu yorumlamaların yer aldığı doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir:

p	q	p⇒q	(p⇒q)∧p	G=((p⇒q)∧p)⇒q
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Görüldüğü gibi G formülü bütün yorumlamalarında T değerini almaktadır. Bu durumda G geçerli bir formüldür (totolojidir).

Alıştırma 1.1

Aşağıdaki ifadelerin totoloji olduklarını doğruluk tablosu yöntemi ile gösteriniz:

p⇔¬(¬p), p∧q⇒p, ¬(p∧¬p), ((p⇒q) ∧p)⇒q

Geçerli olmayan formüle *geçersiz formül* denir. Diğer bir deyişle en az bir F doğruluk değerli yorumlamaya sahip olan formül, geçersiz olacaktır.

Bütün yorumlamaların sonucunda yanlış değerini alan formüle *tutarsız formül* ya da *çelişki* adı verilir.

Diğer bir deyişle, doğruluk tablosunda her satırda F değeri elde edilen bir formül, tutarsız bir formül olacaktır.

Örnek olarak,

$$H = (p \Rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$$

formülünü göz önüne alalım. Bu formülde toplam iki önerme olduğundan, 4 tane yorumlaması olacaktır. Bu yorumlamaların yer aldığı doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir:

p	q	¬q	p⇒q	p∧¬q	G=(p⇒q)∧p∧¬q
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

Görüldüğü gibi H formülü bütün yorumlamalarında F değerini almaktadır. Bu durumda G tutarsız bir formüldür (çelişkidir).

Tutarsız olmayan formüle, "tutarlı formül" denir. Diğer bir deyişle en az bir T doğruluk değerli yorumlamaya sahip olan formül, tutarlı olacaktır.

Bu tanımlama, geçersiz tanımlaması ile çakışır. Yani yorumlamalarının tamamı T ya da F doğruluk değerinden oluşmayan, iki doğruluk değerini de bulunduran formüller tutarlı, ancak geçersizdir.

Şimdi G ve H formüllerinin sırasıyla totoloji ve çelişki olmalarının anlamını, bu formülleri oluşturan p ve q önermelerine günlük hayatımızdan birer anlam yükleyerek daha iyi görmeye çalışalım.

p = “Kırmızı yanar”

q = “Araçlar durur”

olsun. Buna göre G formülünü aşağıdaki gibi anlamlandırabiliriz:

$$G = ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

“Kırmızı yanarsa araçlar durur, kırmızı yanıyor, o halde araçlar duruyor.”

Görüldüğü gibi bu formülün geçerli olduğu, anlamsal olarak da açıktır. Oysa aynı önermelerle başka bir formül oluşturursak:

$$H = (p \Rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$$

“Kırmızı yanarsa araçlar durur, kırmızı yanıyor, o halde araçlar durmuyor.”

İşte burada olduğu gibi günlük yaşantımızda kendisiyle çeliştiğini söylediğimiz ifadeler aslında mantık biliminde de birer çelişkidirler ve bu ifadeler, bütün yorumlamalarda F değerini alırlar.

1.1.8. Sonuç Çıkarma

Bazı durumlarda bir ya da daha çok formülün doğru olması durumunda, bunlara bağlı olarak başka bir formül de doğru olur. Bu formüle, diğer formüllerin mantıksal sonucu denir.

Örnek olarak daha önceki G formülünü aynı önermelerle göz önüne alalım:

p = “Yağmur yağıyor”

q = “Yerler ıslanıyor”

$$G = ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

Burada, q önermesi, $(p \Rightarrow q)$ ve p formüllerinin mantıksal sonucu olacaktır. Çünkü,

$p \Rightarrow q$: “Yağmur yağıyor ise yerler ıslanıyor”

q : “Yağmur yağıyor”

formüllerinden, “o halde yerler ıslanıyordur” sonucunu çıkarmamız, gayet doğaldır.

Daha sembolik gösterecek olursak, bir G formülünün G[1],G[2],...G[n] formülerinin mantıksal sonucu olması demek, G[1],G[2],...G[n] formüllerinin T değerini aldıkları bütün yorumlamalarda G formülünün de T değerini taşıması demektir.

Buna denk olarak, G formülünün G[1],G[2],...G[n] formüllerinin mantıksal sonucu olması demek,

$$G[1] \wedge G[2] \wedge \ldots \wedge G[n] \Rightarrow G$$

formülünün geçerli bir formül, yani totoloji olması demektir.

Basit bir örnek verelim:

p=“Hava sıcaklıkları mevsim normallerinin üzerindedir”

q=“Barajlardaki su seviyesi normalin altındadır”

r =“Programlı su kesintileri uygulanmaktadır”

Şimdi, bu önermeleri kullanarak, aşağıdaki formülleri oluşturalım:

G[1] : $p \Rightarrow q$ “Hava sıcaklıkları mevsim normallerinin üzerine çıkarsa barajlardaki su seviyesi normalin altına düşer”

G[2] : $q \Rightarrow r$ “Barajlardaki su seviyesi normalin altına düşerse programlı su kesintileri uygulanır”

G[3] : p “Hava sıcaklıkları mevsim normallerinin üzerindedir”

Göstermek istediğimiz, r önermesinin G[1], G[2] ve G[3] formüllerinin mantıksal sonucu olduğudur. Yani yukarıdaki formüller doğru olduğunda, bunun bir sonucu olarak programlı su kesintilerinin uygulanacağı gerçeğini elde edeceğiz. Bunun için,

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p) \Rightarrow r$$

formülünün geçerli bir formül, yani totoloji olduğu gösterilmelidir. Doğruluk tablosu yöntemiyle bunu gerçekleştirelim:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p) \Rightarrow r$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T
F	T	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F	T

Görüldüğü gibi oluşturduğumuz

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p) \Rightarrow r$$

formülü geçerli bir formüldür. Dolayısıyla r önermesi, $(p \Rightarrow q)$, $(q \Rightarrow r)$ ve p formüllerinin mantıksal sonucudur.

Sonuç çıkarma için doğruluk tablosu hazırlama yöntemi, her zaman pratik bir yöntem olmayabilir. Çünkü önerme sayısı fazla olduğunda, doğruluk tablosundaki satır sayısı buna bağlı olarak üstel bir şekilde artacağından, hatasız bir şekilde böyle büyük bir tablonun hazırlanması mümkün olmayabilir.

Formüllerin indirgenmesinde kullanılan kurallar, mantıksal sonuç çıkarımında da kullanılırlar. Bu kurallar, bir formülü en sade biçimine indirgemektedirler. Bu en sade biçim, totoloji ya da çelişki de olabilir.

Dolayısıyla, $G[1] \wedge G[2] \wedge \ldots \wedge G[n] \Rightarrow G$ şeklindeki bir formülün bu kurallar kullanılarak totoloji biçimine indirgenmesi demek, bu formülün aslında özdeş olarak totoloji olması demektir ki, bu da G formülünün G[1],G[2],…G[n] formülerinin mantıksal sonucu olması demek olacaktır.

G, H ve J herhangi üç formül olsun. Totoloji atom $\blacksquare$ simgesi ile, çelişki atom ise $\square$ simgesi ile gösterilmek üzere, formül indirgeme kuralları aşağıdaki gibi verilir:

(1) $G \Leftrightarrow H = (G \Rightarrow H) \wedge (H \Rightarrow G)$
(2) $G \Rightarrow H = \neg G \vee H$
(3a) $G \vee G = G$
(3b) $G \wedge G = G$
(4a) $G \vee H = H \vee G$
(4b) $G \wedge H = H \wedge G$
(5a) $(G \vee H) \vee J = G \vee (H \vee J)$
(5b) $(G \wedge H) \wedge J = G \wedge (H \wedge J)$
(6a) $G \vee (H \wedge J) = (G \vee H) \wedge (G \vee J)$
(6b) $G \wedge (H \vee J) = (G \wedge H) \vee (G \wedge J)$
(7a) $G \vee \square = G$
(7b) $G \wedge \blacksquare = G$
(8a) $G \vee \blacksquare = \blacksquare$
(8b) $G \wedge \square = \square$
(9a) $G \vee \neg G = \blacksquare$
(9b) $G \wedge \neg G = \square$
(10) $\neg(\neg G) = G$
(11a) $\neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H$
(11b) $\neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H$

Bir G formülünün, G[1],G[2],…G[n] formüllerinin mantıksal sonucu olması ile,

$$G[1] \wedge G[2] \wedge \ldots \wedge G[n] \Rightarrow G$$

formülünün totoloji olmasının aynı anlama geldiğini biliyoruz. Daha önce ele aldığımız örnekte bu formülün geçerliliğini, doğruluk tablosu yöntemini kullanarak göstermiştik. Şimdi, aynı örneği, yani

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p) \Rightarrow r$$

formülünün totoloji olduğunu, indirgeme kurallarını kullanarak yapalım.

Formül	Uygulanan Kural
$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p) \Rightarrow r$	(-)
$\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge p) \vee r$	(2)
$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee r) \vee \neg p \vee r$	(11b)
$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$	(11a)
$((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee (q \wedge \neg r) \vee r$	(6a)
$((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee ((q \vee r) \wedge (\neg r \vee r))$	(6a)
$(\blacksquare \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee ((q \vee r) \wedge \blacksquare)$	(9a)
$\neg q \vee \neg p \vee q \vee r$	(7b)
$\neg q \vee q \vee \neg p \vee r$	(4a)
$\blacksquare \vee \neg p \vee r$	(9a)
$\blacksquare$	(8a)

Görüldüğü gibi, indirgeme işlemi sonucunda doğruluk tablosunda olduğu gibi totoloji elde edilmiştir. Bunun anlamı, $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p) \Rightarrow r$ ifadesinin geçerli olması, dolayısıyla r önermesinin $(p \Rightarrow q)$, $(q \Rightarrow r)$ ve p formüllerinin sonucu olduğudur.

Bir G formülünün G[1],G[2],…G[n] formüllerinin mantıksal sonucu olduğunu göstermek için alternatif yöntemlerden birisi de, karşıtlık kuralının kullanılmasıdır.

Karşıtlık kuralına göre, bir G formülünün değeri T ise, bunun değili olan $\neg G$'nin değeri F olmalıdır. Yani,

$$G[1] \wedge G[2] \wedge \ldots \wedge G[n] \Rightarrow G$$

formülünün totoloji olması ile, bunun değili olan,

$$\neg(G[1] \wedge G[2] \wedge \ldots \wedge G[n] \Rightarrow G)$$

formülünün çelişki olması aynı anlama gelmektedir. Bu formüle indirgeme kurallarını uygularsak,

$$\begin{aligned} &\neg(G[1] \wedge G[2] \wedge \ldots \wedge G[n] \Rightarrow G) \\ &\quad = \neg\,(\neg(G[1] \wedge G[2] \wedge \ldots \wedge G[n]) \vee G) \\ &\quad = \neg\,(\neg G[1] \vee \neg G[2] \vee \ldots \vee \neg G[n] \vee G) \\ &\quad = G[1] \wedge G[2] \wedge \ldots \wedge G[n] \wedge \neg G \end{aligned}$$

elde edilir. Yani G formülünün G[1],G[2],…G[n] formüllerinin mantıksal sonucu olduğunu göstermek için,

$$G[1] \wedge G[2] \wedge \ldots \wedge G[n] \wedge \neg G$$

formülünün <u>çelişki</u> olduğunun gösterilmesi de yeterli olacaktır.

Şimdi, indirgeme kurallarını kullanarak,

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p) \Rightarrow r$$

formülünün geçerli bir formül olduğunu göstermek yerine, bunun değili olan,

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg r$$

formülünün çelişki olduğunu gösterelim.

Formül	Uygulanan Kural
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg r$	(-)
$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge p \wedge \neg r$	(2)
$((\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r$	(6b)
$((\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \wedge ((\neg q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg r))$	(6b)
$(\square \vee (q \wedge p)) \wedge ((\neg q \wedge \neg r) \vee \square)$	(9b)
$q \wedge p \wedge \neg q \wedge \neg r$	(8a)
$q \wedge \neg q \wedge p \wedge \neg r$	(4b)
$\square \wedge p \wedge \neg r$	(9b)
$\square$	(8b)

Görüldüğü gibi, indirgeme işlemi sonucunda çelişki elde edilmiştir. Bunun anlamı, $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg r$ ifadesinin çelişki olması, dolayısıyla bunun değili olan $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p) \Rightarrow r$ ifadesinin geçerli olmasıdır. O halde r önermesi $(p \Rightarrow q)$, $(q \Rightarrow r)$ ve p formüllerinin mantıksal sonucudur.

Örnek 1.3

Aşağıdaki kimyasal reaksiyonları göz önüne alalım:

$MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$

$C + O_2 \rightarrow CO_2$

$CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$

Acaba elimizde yeterli miktarda MgO, H_2, O_2 ve C varsa H_2CO_3 elde edebilir miyiz?

Bu problemi hiçbir kimya bilgisi kullanmadan, tümüyle önermeler mantığı içersinde çözeceğiz. Bunun için bileşenler birer önerme, reaksiyonları ise mantıksal gerektirme, yani neden-sonuç ilişkisi olarak ele alacağız. Bu durumda elimizde aşağıdaki formüller olacaktır:

(G_1) $(MgO \wedge H_2) \Rightarrow (Mg \wedge H_2O)$

(G_2) $(C \wedge O_2) \Rightarrow CO_2$

(G_3) $(CO_2 \wedge H_2O) \Rightarrow H_2CO_3$

(G_4) MgO

(G_5) H_2

(G_6) O_2

(G_7) C

Şimdi yapmamız gereken, H_2CO_3 önermesinin bu yedi formülün mantıksal sonucu olduğunu göstermektir. Bunun için karşıtlık kuralını kullanacağız. Yani,

$$(G_1)\wedge(G_2)\wedge(G_3)\wedge(G_4)\wedge(G_5)\wedge(G_6)\wedge(G_7)\wedge\neg H_2CO_3$$

ifadesinin çelişki olduğunu göstereceğiz. Altı çizili ifadeler, dağılma işlemi sonucunda değili ile eşleşecek önermeleri göstermektedir.

$(G_1)\wedge(G_2)\wedge(G_3)\wedge(G_4)\wedge(G_5)\wedge(G_6)\wedge(G_7)\wedge\neg H_2CO_3$

$\equiv [\underline{\neg(MgO\wedge H_2}\vee(Mg\wedge H_2O)]\wedge[\neg(C\wedge O_2)\vee CO_2)]\wedge[\neg(CO_2\wedge H_2O)\vee H_2CO_3]\wedge\underline{MgO\wedge H_2}\wedge O_2\wedge C\wedge\neg H_2CO_3$

$\equiv [[\neg(MgO\wedge H_2)\wedge(MgO\wedge H_2)]\vee[(Mg\wedge H_2O)\wedge(MgO\wedge H_2)]]\wedge[\neg(C\wedge O_2)\vee CO_2)]\wedge[\neg(CO_2\wedge H_2O)\vee H_2CO_3]\wedge$
$O_2\wedge C\wedge\neg H_2CO_3$

$\equiv \Box\vee[(Mg\wedge H_2O)\wedge(MgO\wedge H_2)]\wedge[\neg(C\wedge O_2)\vee CO_2)]\wedge[\neg(CO_2\wedge H_2O)\vee H_2CO_3]\wedge O_2\wedge C\wedge\neg H_2CO_3$

$\equiv [(Mg\wedge H_2O)\wedge(MgO\wedge H_2)]\wedge[\underline{\neg(C\wedge O_2}\vee CO_2)]\wedge[\neg(CO_2\wedge H_2O)\vee H_2CO_3]\wedge\underline{O_2\wedge C}\wedge\neg H_2CO_3$

$\equiv [(Mg\wedge H_2O)\wedge(MgO\wedge H_2)]\wedge[[\neg(C\wedge O_2)\wedge(C\wedge O_2)]\vee[CO_2\wedge(C\wedge O_2)]]\wedge[\neg(CO_2\wedge H_2O)\vee H_2CO_3]\wedge\neg H_2CO_3$

$\equiv [(Mg\wedge H_2O)\wedge(MgO\wedge H_2)]\wedge[\ \Box\vee[CO_2\wedge(C\wedge O_2)]]\wedge[\neg(CO_2\wedge H_2O)\vee H_2CO_3]\wedge\neg H_2CO_3$

$\equiv Mg\wedge\underline{H_2O}\wedge MgO\wedge H_2\wedge\underline{CO_2}\wedge C\wedge O_2\wedge[\underline{\neg(CO_2\wedge H_2O)}\vee H_2CO_3]\wedge\neg H_2CO_3$

$\equiv Mg\wedge MgO\wedge H_2\wedge C\wedge O_2\wedge[[\neg(CO_2\wedge H_2O)\wedge(CO_2\wedge H_2O)]\vee[(H_2CO_3\wedge(CO_2\wedge H_2O)]]\wedge\neg H_2CO_3$

$\equiv Mg\wedge MgO\wedge H_2\wedge C\wedge O_2\wedge[\Box\vee[(H_2CO_3\wedge(CO_2\wedge H_2O)]]\wedge\neg H_2CO_3$

$\equiv Mg\wedge MgO\wedge H_2\wedge C\wedge O_2\wedge\underline{H_2CO_3}\wedge CO_2\wedge H_2O\underline{\wedge\neg H_2CO_3}$

$\equiv Mg\wedge MgO\wedge H_2\wedge C\wedge O_2\wedge CO_2\wedge H_2O\wedge\Box$

$\equiv \Box$

O halde

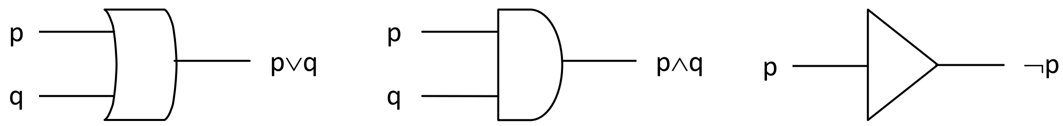
$$[(G_1)\wedge(G_2)\wedge(G_3)\wedge(G_4)\wedge(G_5)\wedge(G_6)\wedge(G_7)]\Rightarrow H_2CO_3$$

formülü totolojidir; yani H_2CO_3 bu yedi ifadenin mantıksal sonucudur.

1.1.9. Önermeler Mantığının Elektrik Devrelerine Uygulanması

Elektronik anahtarlı devrelerin kâğıt üzerinde gerçekleştirilen teorik tasarımlarında, önermeler mantığı etkin olarak kullanılabilir. Mantığın temelini oluşturan Doğru ve Yanlış değerleri, bir elektrik devresinde sırasıyla akımın geçmesi ve geçmemesi durumlarına karşılık gelir. Örneğin bir akım kaynağı ya da bir anahtar kapalı konumda ise Yanlış, yani 0; açık konumda ise Doğru, yani 1 değerine sahip olacaktır.

Bu bakış açısıyla değerlendirdiğimizde, önermelerden oluşan mantıksal bir formül, birbirlerine tellerle bağlanmış bağımsız güç kaynakları ve anahtarlardan meydana gelmiş bir elektrik devresine karşılık gelecektir. Bu devrelerde *kapı* olarak adlandırılan üç temel anahtar sistemi vardır: *ve kapısı*, *veya kapısı* ve *değil kapısı*. Şekil 1.1'de bu kapıların şematik gösterimleri verilmiştir.



Şekil 1.1. Temel mantık kapıları

p ve q önermelerini birer bağımsız güç kaynağı olarak düşünürsek, veya kapısı p ya da q kaynaklarından gelen elektrik akımını iletecektir. Diğer bir deyişle p ya da q kaynaklarından en az birisinden (ya da her ikisinden birden) alım gelmesi yeterli olacaktır. Bu durum, önermeler mantığında p ve q önermelerinin doğruluk değerlerine göre $p \vee q$ formülü ile aynı şekilde yorumlanabilir.

Ve kapısında ise, bu anahtardan akımın iletilebilmesi için p ve q kaynaklarının her ikisinden birden akımın gelmesi gerekecektir. Bunun dışındaki durumlarda bu kapıdan akım iletilmez. Benze şekilde bu durum da önermeler mantığında p ve q önermelerinin doğruluk değerlerine göre $p \wedge q$ formülü ile aynı biçimde yorumlanabilir.

Değil kapısında durum biraz daha farklıdır. Bu kapı, kendisine gelen telde akım yoksa, çıkış noktasında akım üretir. Yani 0 değerini 1 değerine dönüştürür. Kendisinden önce akım varsa ise bu akımı devrenin kalanına iletmez. Diğer bir deyişle 1 değerini 0 değerine dönüştürür. Bu da, önermeler mantığındaki değil operatörünün işlevi ile aynı anlama gelecektir.

Örnek 1.4.

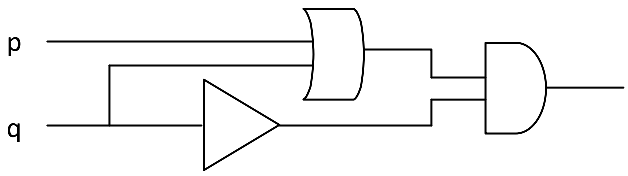
Aşağıdaki ifadeyi göz önüne alalım:

$$(p \vee q) \wedge \neg q$$

Öncelikle ifadeye karşılık gelen doğruluk tablosunu oluşturalım:

p	q	$(p \vee q) \wedge \neg q$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F

Şimdi bu ifadeyi, mantıksal operatörlere karşılık gelen kapıları kullanarak resimleyelim.



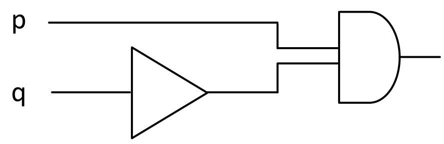
Şekil 1.2. $(p\vee q)\wedge\neg q$ formülüne karşılık gelen elektrik devresi

Doğruluk tablosundan da anlaşılacağı gibi, bu devreden sadece bir durumda elektrik akımı iletilebilmektedir: p kaynağından akımın geldiği, q kaynağından akımın gelmediği durum. Diğer durumların hiçbirisinde akım çıkış noktasına ulaşmamaktadır.

Şimdi indirgeme kurallarını kullanarak bu ifadeyi indirgemeye çalışalım:

$$
\begin{aligned}
(p\vee q)\wedge\neg q \quad &\equiv \quad (p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg q) \\
&\equiv \quad (p\wedge\neg q)\vee\square \\
&\equiv \quad p\wedge\neg q
\end{aligned}
$$

O halde formülümüz, $p\wedge\neg q$ formülüne eşdeğerdir. Bu formüle karşılık gelen devreyi çizelim.

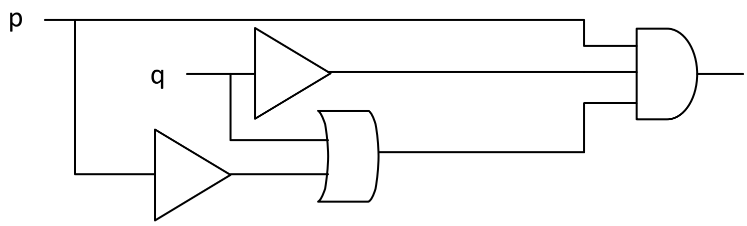


Şekil 1.3. $p\wedge\neg q$ formülüne karşılık gelen elektrik devresi

Bu durumda Şekil 1.3.'de verilen elektrik devresi, Şekil 1.2.'de verilen devreye eşdeğerdir ancak daha az kapı ve tel kullanılarak oluşturulmuştur.

<u>Örnek 1.5.</u>

Formülümüz $(\neg p\vee q)\wedge\ p\wedge\neg q$ olsun. Bu ifadeye karşılık gelen devre şekildeki gibi olacaktır.



Şekil 1.4. $(\neg p\vee q)\wedge\ p\wedge\neg q$ formülüne karşılık gelen elektrik devresi

p ve q kaynaklarının durumu ne olursa olsun, bu devreden çıkış noktasına ulaşan bir akım olmayacaktır. Yani p ve q'nun her ikisinin de açık olduğu; p'nin açık, q'nun kapalı olduğu; p'nin kapalı, q'nun açık olduğu; p ve q'nun her ikisinin de kapalı olduğu durumlarda çıkış noktasındaki değer sıfır olacaktır.

Bunun sebebini ifadeyi indirgeyerek görelim:

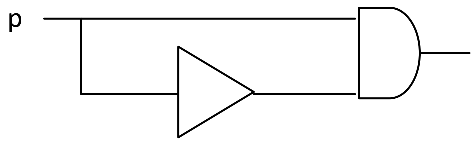
$(\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q \;\equiv (\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee q)$

$\equiv \square$

Görüldüğü gibi, aslında ifade ettiğimiz formül mantıksal olarak bir çelişkidir. Yani bütün yorumlamalarda yanlış değerini alan bir ifadedir. Dolayısıyla bu formüle karşılık gelen elektrik devresinin de hiçbir zaman akımı iletmeyecek bir devre olması doğal bir sonuç olacaktır.

<u>Örnek 1.6.</u>

En temel çelişki formülü olan $p \wedge \neg p$ ifadesine karşılık gelen elektrik devresi Şekil 1.5.'deki gibi olacaktır.



Şekil 1.5. $p \wedge \neg p$ formülüne karşılık gelen elektrik devresi

Bu devreden de p kaynağının açık ya da kapalı olduğu durumlarda akım iletilmeyecektir.

<u>Örnek 1.7.</u>

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ formülünün bir totoloji olduğunu biliyoruz. Şimdi bu formüle karşılık gelen devreyi çizelim. Öncelikler ifademizi standart biçime getirmeliyiz:

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \;\equiv [(\neg p \vee q) \wedge p] \Rightarrow q$

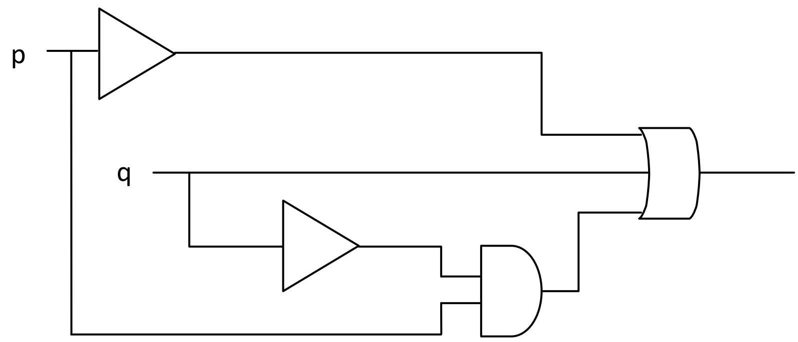
$\equiv \neg\, [(\neg p \vee q) \wedge p] \vee q$

$\equiv \neg\, (\neg p \vee q) \vee \neg p \vee q$

$\equiv (p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q$

$\equiv \blacksquare$

Bu durumda formülümüze karşılık gelen devrenin tasarımı Şekil 1.6.'daki gibi olacaktır.



Şekil 1.6. (p∧¬q)∨¬p∨q formülüne karşılık gelen elektrik devresi

Ele aldığımız formül bir totoloji idi, yani bütün yorumlamalarda doğru değerini alan bir ifade. Dolayısıyla devreden p ve q'nun değeri ne olursa olsun her durumda akım geçeceğini görebilirsiniz.

<u>Örnek 1.8.</u>

Bir odanın aydınlatmasında kullanılan lamba, iki farklı anahtarla kontrol ediliyor olsun. Bu anahtarların her ikisi de aynı konumda ise, yani her ikisi de açık ya da her ikisi de kapalı ise lamba yanmayacaktır. Ancak birinci anahtar açık, ikincisi kapalı ise (ya da tersi durumda) lamba yanacaktır. Diğer bir deyişle anahtarların konumlar birbirlerinden farklı iken lamba yanacaktır.

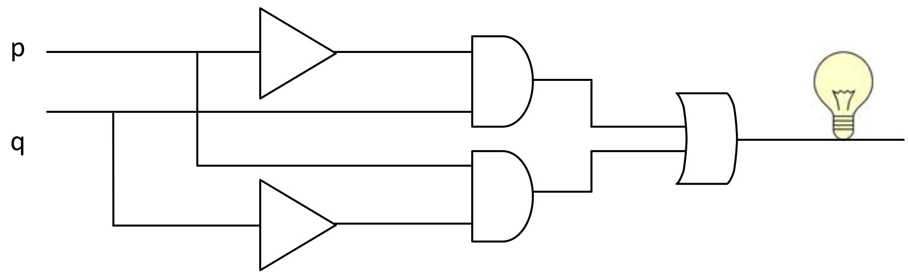
Anahtarları sırasıyla p ve q önermeleri ile gösterelim ve öncelikle bu duruma karşılık gelen formülü oluşturalım. Oluşturacağımız formül için doğruluk tablosunun aşağıdaki gibi olmasını beklemekteyiz:

p	q	Sonuç
T	T	F
F	T	T
T	F	T
F	F	F

Tablonun ikinci ve üçüncü satırından anlıyoruz ki, ya ¬p∧q doğru değerini aldığında, ya da p∧¬q doğru değerini aldığında sonuç doğru olmaktadır. O halde ifademiz,

(¬p∧q)∨(p∧¬q)

olacaktır. Bu ifadeye karşılık gelen devre tasarımı ise Şekil 1.7.'de gösterilmiştir.



Şekil 1.7. (¬p∧q)∨(p∧¬q) formülüne karşılık gelen elektrik devresi

Örnek 1.9.

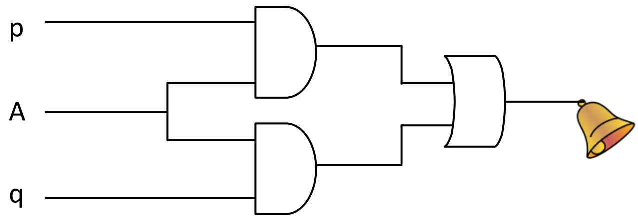
Bir hayvanat bahçesinde iki tehlikeli türe ait kafeste alarm sistemi bulunmaktadır. Bu sistemin bağlı olduğu güç kaynağı devrede iken kafeslerden herhangi birisinin kapısı (ya da aynı anda her ikisi de) açıldığında alarm çalacaktır. Bu sistemi öncelikle mantıksal ifade olarak tasarlayalım.

A, alarma ait güç kaynağını, p ve q ise sırasıyla birinci ve ikinci kafeslerin kapısı açıldığında devreye girecek güç kaynaklarını gösteren önermeler olsun. Bu durumda şu yorumu yapabiliriz: alarm güç kaynağı açık durumda ve birinci kafes açık ise, ya da alarm güç kaynağı açık durumda ve ikinci kafes açık ise alarm çalacaktır. Diğer bir deyişle,

$$(A \wedge p) \vee (A \wedge q)$$

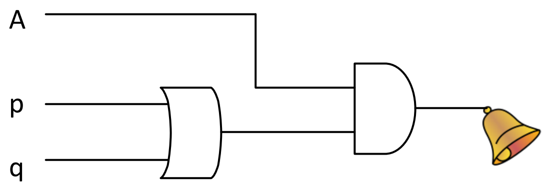
formülü bize mevcut durumu verecektir. Eğer kafeslerin her ikisinin de kapısı açıksa bu durumda yine yukarıdaki ifadenin değeri doğru olacaktır.

Bu formüle karşılık gelen devre ise Şekil 1.8.'de gösterilmiştir.



Şekil 1.8. $(A \wedge p) \vee (A \wedge q)$ formülüne karşılık gelen elektrik devresi

Aslında $(A \wedge p) \vee (A \wedge q)$ formülünü $\wedge$-operatörünün dağılma kuralını kullanarak $A \wedge (p \vee q)$ biçiminde yazabiliriz. Bu durumda devremizin yeni biçimi Şekil 1.9.'daki gibi olacaktır.



Şekil 1.9. $A \wedge (p \vee q)$ formülüne karşılık gelen elektrik devresi

Bu tasarımın işlevi de önceki ile eşdeğer olacaktır; ancak bu defa üç yerine iki kapı kullanılmıştır.

1.2. KÜMELER

Nesnelerin bir topluluğuna *küme* adı verilir. Genellikle bu nesnelerin, onları aynı türden yapan ortak bir özellikleri bulunur. Örneğin alfabedeki küçük harfler kümesi ya da sayma sayıları kümesi gibi.

Kümelerle ilgili olarak söylenebilecek önemli bir özellik, kümelerde tekrarlanan elemanların sadece bir defa kullanılmasıdır. Örneğin 1, $\sqrt{2}$ sayılarından oluşan küme ile 1, 1, 1, $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{2}$ sayılarından oluşan küme birbirine denk olacaktır.

Eğer bir x nesnesi, bir A kümesi tarafından içeriliyorsa bu durum "x, A'nın elemanıdır" biçiminde ifade edilir ve $x \in A$ ile gösterilir. Bunun tersi durum, yani x nesnesinin A kümesi tarafından içerilmediği durum ise $x \notin A$ ile gösterilir.

Bir A kümesinin eleman sayısı s(A) ile gösterilir. Eğer A kümesi sonlu sayıda eleman içeriyorsa bu sayı pozitif bir tamsayı olacaktır.

Ele aldığımız kümeyi oluşturan bütün elemanların oluşturduğu ve kümemizin de altkümesi durumunda olduğu en geniş kümeye *evrensel küme* adı verilir. Evrensel küme, çalışılan konuya bağlı olarak değişecektir. Söz gelimi kümeleri harflerle ilgili bir çalışma üzerinde kullanıyorsak evrensel kümemiz alfabedeki bütün harfler, sayılarla ilgili olarak kullanıyorsan evrensel kümemiz bütün sayı türlerini kapsayan gerçel (reel) sayılar kümesi olacaktır. Evrensel kümeyi E simgesi ile gösteririz.

Hiçbir elemanı bulunmayan kümeye *boş küme* adı verilir. Boş küme, $\emptyset$ simgesi ile gösterilir.

1.2.1. Kümelerin Gösterimi

Kümelerin gösteriminde { } parantezlerinin kullanıldığı klasik gösterim ve kümelerin düzlemde iki boyutlu şekillerle gösterildiği Venn şemaları gösterimi olmak üzere iki farklı yöntem bulunmaktadır.

Örnek 1.10

A={2,4,6,8,10}, B={Ankara,İstanbul,İzmir} gibi.

Bu gösterim, eğer kümenin elemanlarının tümü p_1, p_2, …, p_n ($n\geq1$) özelliklerini sağlıyorlarsa,

A={x : x, p_1 özelliğini sağlar **ve** x, p_2 özelliğini sağlar **ve** … x, p_n özelliğini sağlar}

şeklini alır. Örneğin yukarıda verilen A kümesini bu yöntemle,

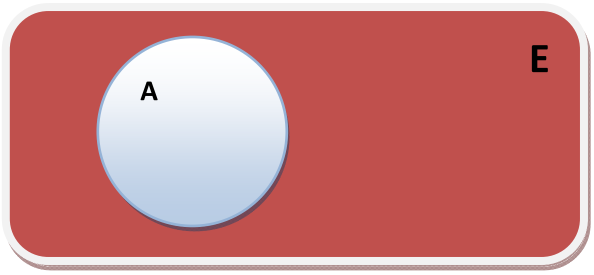
A={x : x çift sayıdır ve $x\leq10$}

Biçiminde gösterebiliriz. Bu gösterimin en önemli avantajı, sonsuz eleman içeren kümelerin gösteriminde de kullanılabilir olmasıdır.

Örnek 1.11

A={x : x negatif tamsayı}. Bu küme sonsuz sayıda eleman içerir ve bütün elemanlarını açık olarak gösterme olanağımız yoktur.

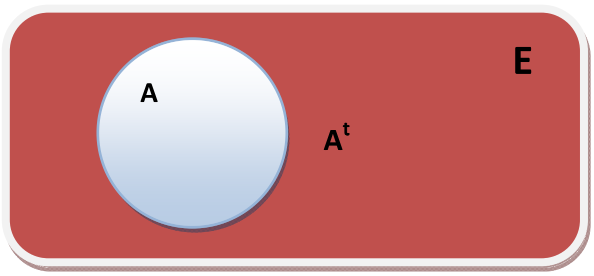
Kümelerin gösteriminde daha çok kümeler arasındaki ikili işlemlerin görselleştirilmesinde kullanılan Venn şemalarını, Şekil 1.10.'daki gibi gösterebiliriz. Şekilde evrensel küme ve içersinde yer alan A kümesi gösterilmektedir.



Şekil 1.10. Evrensel küme ve içersinde yer alan A kümesi

1.2.2. Bir Kümenin Tümleyeni

Evrensel küme içersinde, bir A kümesinin dışında kalan elemanları içeren kümeye A kümesinin *tümleyeni* adı verilir ve A^t ile gösterilir.



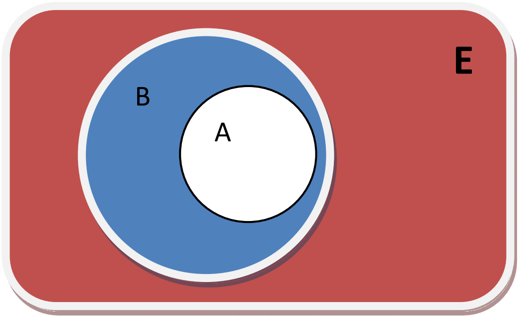
Şekil 1.11. Bir kümenin tümleyeni

Kümenin tümleyenini ortak özellik yöntemi ile de gösterebiliriz:

$$A^t=\{x : x \notin A \wedge x \in E\}$$

1.2.3. Altküme Kavramı ve Kümelerin Eşitliği

A ve B iki küme olsun. Eğer A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elamanı A kümesi B kümesinin *altkümesidir* denir ve ise bu durum, $A \subseteq B$ biçiminde gösterilir.



Şekil 1.12. Altküme kavramı. $A\subseteq B$

Tanımı gereğince her küme kendisinin altkümesidir. Altküme simgesinde yer alan eşitlik işaretinin kullanılma sebebi bu durumdur. Eğer bir A kümesi B kümesinin altkümesi ve B kümesinde A kümesinde bulunmayan en az bir eleman varsa bu durumda A, B'nin *öz altkümesi* denir. Bu durum ise $A\subset B$ biçiminde gösterilecektir.

s(A)=n olan bir A kümesinin toplam 2^n tane altkümesi vardır ve bunlara kümenin kendisi de dâhildir. Dolayısıyla kümenin öz altkümelerinin sayısı 2^{n-1} olacaktır.

Örneğin A={1,2,3,4} kümesinin toplam 2^4-1=15 adet öz altkümesi vardır. Bunlar:

$\varnothing$, {1], {2}, {3}, {4}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {1,2,3}, {2,3,4}, {1,3,4}, {1,2,4}

olarak yazılabilir.

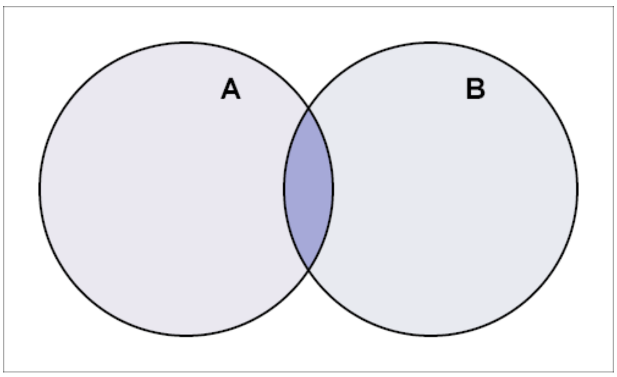
1.2.4. Kümeler Arasındaki İkili İşlemler

Kümeler arasında üç temel ikil işlem tanımlıdır. Bunlar sırasıyla kesişim (arakesit), birleşim ve fark işlemidir.

1.2.4.1. Kesişim (Arakesit)

A ve B kümeleri verilmiş olsun. Aynı anda hem A, hem de B kümesine ait elemanların oluşturdukları kümeye A ve B kümelerinin *kesişimi* (*arakesiti*) adı verilir. Bu küme $A\cap B$ ile gösterilir.

$$A\cap B=\{x : x\in A \wedge x\in B\}$$

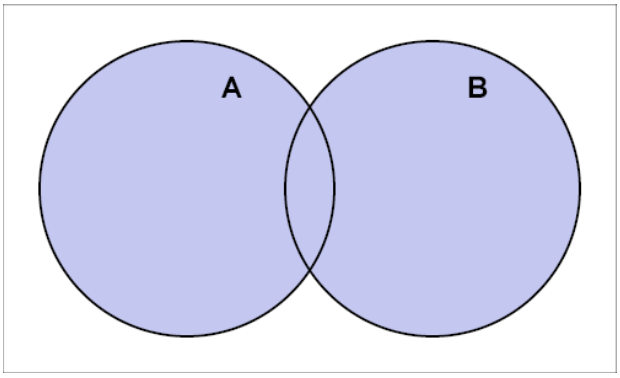


Şekil 1.13. İki kümenin kesişimi

1.2.4.2. Birleşim

A ve B kümeleri verilmiş olsun. A ve B kümesine ait elemanların oluşturdukları kümeye A ve B kümelerinin *birleşimi* adı verilir. Bu küme $A \cup B$ ile gösterilir.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

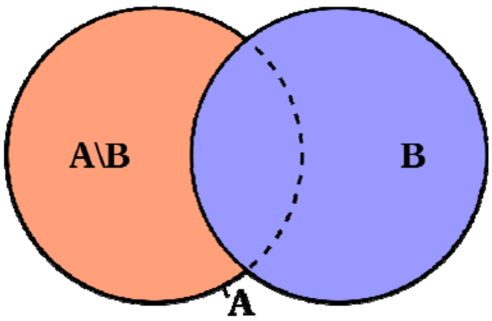


Şekil 1.14. İki kümenin birleşimi

1.2.4.3. Fark

A ve B kümeleri verilmiş olsun. A kümesine ait elemanlardan B kümesi tarafından içerilmeyen elemanların oluşturdukları kümeye A kümesinin B kümesinden *farkı* adı verilir. Bu küme A\B ile gösterilir.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \vee x \notin B\}$$



Şekil 1.15. A kümesinin B kümesinden farkı

Kesişim ve birleşim işlemlerinin aksine fark işlemi değişmeli (komutatif) değildir. Yani $A \setminus B \neq B \setminus A$ olur.

1.2.5. Kümeler ve Önermeler Arasındaki İlişki

Kümeleri birer önerme olarak düşünürsek, önermeler mantığında geçerli olan bütün kurallar mantıksal bağlaçlar ile kümeler arasındaki ikili işlem operatörleri arasındaki paralellik doğrultusunda kümeler için de geçerli olmaktadır. İşlemler arasındaki ilişkiler Tablo 1.1.'de verilmiştir.

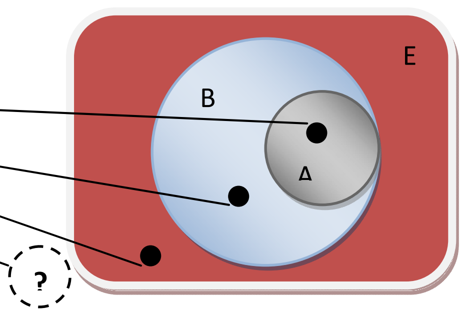
Önermeler Mantığı	Kümeler
$\wedge$	$\cap$
$\vee$	$\cup$
□	$\varnothing$
■	**E**
$\Rightarrow$	$\subset$
$\Leftrightarrow$	$\equiv$
$\neg$**A**	$\mathbf{A}^t$

Tablo 1.1. Önermeler mantığı ile kümeler arasındaki ilişki

Bu ilişkide şu durum göz önünde bulundurulmalıdır. Herhangi bir kümeyi bir önerme olarak düşündüğümüzde, önermenin bir yorulmada T değerin alması ile bir x değerinin o kümenin elemanı olması aynı anlama gelecektir. Benzer şekilde eğer x kümenin elamanı değilse bu durumda kümeye karşılık gelen önerme F değerini alacaktır.

Bu durumu $A \Rightarrow B$ ve $A \subset B$ eşleşmesinde görelim.

A	**B**	$\mathbf{A \Rightarrow B}$	$\mathbf{A \subset B}$
T	T	T	$x \in A \wedge x \in B$
F	T	T	$x \notin A \wedge x \in B$
F	F	T	$x \notin A \wedge x \notin B$
T	F	F	$x \in A \wedge x \notin B$



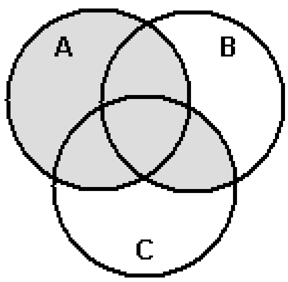
Bu örnek, gerektirme operatörünün neden sadece T, F durumunda yanlış sonucunu verdiğini de göstermektedir.

Önermeler mantığında kullanılan indirgeme kuralları, Tablo 1.1.'de verilen eşleşmeler doğrultusunda kümeler için de geçerli olan cebirsel kuralların elde edilmesinde kullanılabilir. Bu kurallar Tablo 1.2.'de verilmiştir.

Mantıksal İndirgeme Kuralı	Kümeler Cebiri Kuralı
$G \Leftrightarrow H = (G \Rightarrow H) \wedge (H \Rightarrow G)$	$A \equiv B = (A \subset B) \wedge (B \subset A)$
$G \vee G = G$	$A \cup A = A$
$G \wedge G = G$	$A \cap A = A$
$G \vee H = H \vee G$	$A \cup B = B \cup A$
$G \wedge H = H \wedge G$	$A \cap B = B \cap A$
$(G \vee H) \vee J = G \vee (H \vee J)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(G \wedge H) \wedge J = G \wedge (H \wedge J)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$G \vee (H \wedge J) = (G \vee H) \wedge (G \vee J)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$G \wedge (H \vee J) = (G \wedge H) \vee (G \wedge J)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$G \vee \square = G$	$A \cup \varnothing = A$
$G \wedge \blacksquare = G$	$A \cap E = A$
$G \vee \blacksquare = \blacksquare$	$A \cup E = E$
$G \wedge \square = \square$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$G \vee \neg G = \blacksquare$	$A \cup A^t = E$
$G \wedge \neg G = \square$	$A \cap A^t = \varnothing$
$\neg(\neg G) = G$	$(A^t)^t = A$
$\neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H$	$(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$
$\neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H$	$(A \cap B)^t = A^t \cup B^t$

Tablo 1.2. Mantıksal indirgeme kuralları ve kümeler cebiri

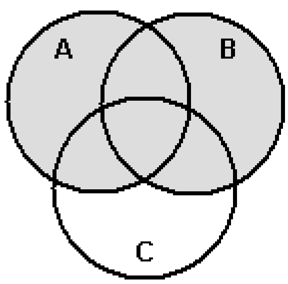
Önerme yaklaşımı ile doğruluklarını gösterebileceğimiz, tablonun sağ tarafında kalan cebirsel eşitlikleri Venn şemalarını kullanarak da görebiliriz. Şimdi bu kurallardan $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ eşitliğini Venn şemalarını kullanarak gösterelim.



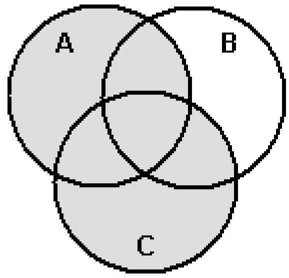
$A \cup (B \cap C)$

Eşitliğin sağ tarafını, yani $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ ifadesini üç adımda oluşturalım:

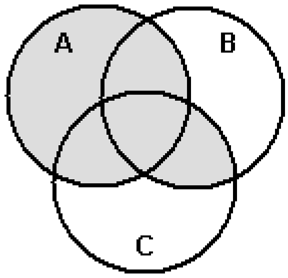
1. Adım: $A \cup B$



2. Adım: A∪C



3. Adım: (A∪B)∩(A∪C)



Sonuç olarak eşitliğin her iki tarafı da aynı şemayı oluşturmaktadır.

1.3. SAYI KÜMELERİ

İnsanlar tarafından kullanılan ilk sayı kümesi olan “Sayma Sayıları”, 1 den başlayan pozitif tamsayılardır. Bu kümeye 0 (sıfır) sayısının eklenmesi ile N ile gösterilen “Doğal Sayılar” kümesi elde edilir.

$$N=\{0,1,2,3,4, \dots \infty\}$$

Negatif sayı kavramının geliştirilmesi ve bu sayıların da doğal sayılara katılması ile, daha geniş olan “Tamsayılar” kümesi elde edilmiştir. Z harfi ile gösterilen bu küme, her iki taraftan da sonsuz büyüklükte olacaktır.

$$Z=\{-\infty \dots -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4, \dots \infty\}$$

Sıfırın solunda yer alan sayılar “negatif tamsayılar”, sağındakiler ise “pozitif tamsayılar” olarak adlandırılırlar. Tamsayılarla ilgili çeşitli sınıflandırmalar bulunmaktadır. Bunlardan en önemlileri, tek ve çift tamsayılar ile asal sayılardır.

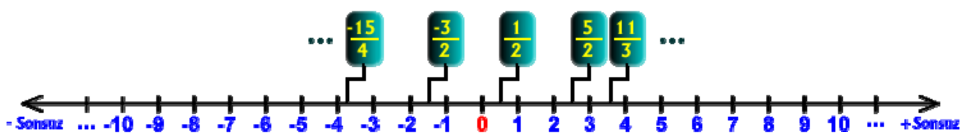
2 ile tam bölünebilen tamsayılara çift tamsayı denir. Çift olmayan tamsayılar, tek tamsayılardır. Örneğin 2,4,6 çift, 3,5,7 ise tek tamsayılardır.

1 dışında sadece kendisine tam bölünebilen tamsayılar ise asal sayılar adını alır. Diğer bütün tamsayılar, asal tamsayıların bir çarpımı olarak yazılabilirler. Örneğin 2,3,5,7,11,13,17 asal tamsayılardır.

a ve b iki tamsayı olmak üzere, a/b şeklinde yazılan sayılar “rasyonel sayılar” ya da “kesirli sayılar” olarak adlandırılır. Örneğin 1/2, 4/7, 11/5 gibi. Bu sayılardan, kesir çizgisinin üzerinde yer alana “pay”, altında yer alana “payda” adı verilir.

Her tamsayı, paydası 1 olan bir rasyonel sayı olarak ifade edilebilir. Örneğin 3=3/1, -4=-4/1 olarak yazabiliriz. Dolayısıyla, Q harfi ile gösterilen “Rasyonel Sayılar” kümesi, tamsayılar kümesini de içine alan daha geniş bir küme olacaktır.

Bu noktada, insanoğlunu uzun bir süre meşgul etmiş sorulardan birisi ile karşılaşırız. Aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi, sayı doğrusu adı verilen yatay doğru üzerine bütün tamsayıları ve onların kesirli biçimleri olan rasyonel sayıları işaretlediğimizde, bu doğru üzerinde herhangi bir boşluk kalır mı?



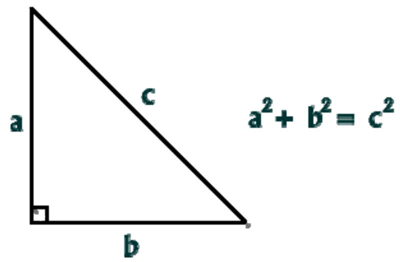
Şekil 1.16. Rasyonel sayılar

Eski Yunanlılar tarafından kanıtlanmış bir teorem, bu şekilde yazılamayan sayıların varlığı konusunda önemli bir ipucu vermektedir. Bu teoreme göre, $\sqrt{2}$ sayısı a/b şeklinde yazılamaz. Yani bu sayı rasyonel değildir. Gerçekten de bu sayıyı hesapladığınız takdirde, virgülün sağında yer alan kısmın, sonsuza kadar rastgele bir düzende giden sayılardan oluştuğunu gözlemleriz:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753 \ldots$$

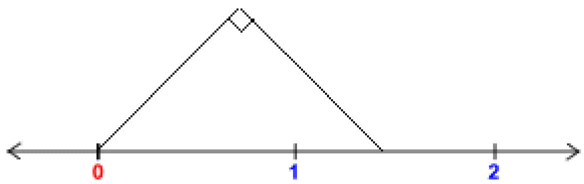
Her ne kadar varlıkları kanıtlansa da, sayı doğrusu üzerinde yerlerinin tam olarak belirlenememesi nedeniyle "rasyonel olmayan" bu sayılara uzunca bir süre şüpheyle yaklaşılmıştır. Bu sayıların en meşhurlarından olan $\sqrt{2}$ sayısının yerinin sayı doğrusu üzerinde tam olarak belirlenmesi, M.Ö. 500'lü yıllarda yaşamış olan matematikçi ve filozof Pisagor tarafından kanıtlanmış ünlü Pisagor Teoremi'nden sonra gerçekleştirilebilmiştir.

Bu teoreme göre, herhangi bir dik üçgenin kenarları aşağıdaki bağıntıyı sağlamak zorundadır.



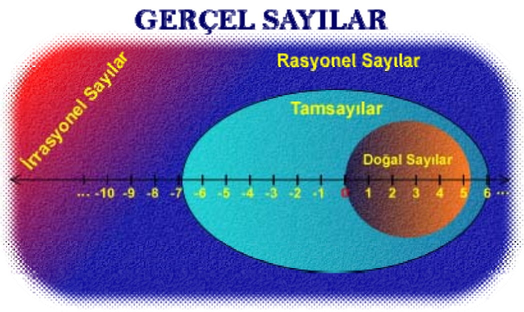
Şekil 1.17. Pisagor Teoremi

Şimdi, iki dik kenarının uzunluğu 1 birim olan bir dik üçgeni göz önüne alalım. Bu durumda bu üçgenin "hipotenüs" olarak adlandırılan üçüncü kenarının uzunluğu tam olarak $\sqrt{2}$ kadar olacaktır. Bu üçgeni, aşağıdaki gibi bir köşesi 0 noktasına gelecek şekilde sayı üzerine oturttuğumuz takdirde, diğer köşesinin gösterdiği nokta $\sqrt{2}$ nin yeri olacaktır.



Şekil 1.18. $\sqrt{2}$ nin sayı doğrusu üzerindeki yeri

Böylece, "irrasyonel sayılar" olarak adlandırılan bu sayıların da rasyonel sayılara eklenmesi ile, en geniş sayı kümesi olan ve R ile gösterilen "Gerçel Sayılar" kümesi elde edilmiş olur. Şekil 1.19.'da, sayı kümelerinin birbirleri ile kapsama ilişkisi görülmektedir.



Şekil 1.19. Sayı kümeleri